ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

HERAUSGEGEBEN VON PROFESSOR R. VON MISES, BERLIN

Unter Mitwirkung von L. FÖPPL-München, G. HAMEL-Charlottenburg, Th. v. KÁRMÁN-Aachen, R. MOLLIER-Dresden, L. PRANDTL-Göttingen, H. REISSNER-Charlottenburg, R. RÜDENBERG-Berlin

INHALT:



Z. f. angew. Mathem. u. Mech. / Berlin, Februar 1930 / Band 10 / Nr. 1 / Seite 1–104
VDI-VERLAG G.M.B.H / BERLIN NW 7
BEZUGSBEDINGUNGEN UND ANZEIGENPREISE AUF DER 3. UMSCHLAGSEITE

ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

Band 10 **Februar 1930** **Heft 1**

Inhalt:

HAUPTAUFSÄTZE

Die Wärmeübertragung einer geheizten Platte an strömende Luft.

II. Vergleich der Versuchsergebnisse mit der Theorie.

Von **FRANZ ÉLIÁS** in Berlin.

(Aus dem Aerodynamischen Institut der Technischen Hochschule in Aachen.)

[Schluß von Heft 6 (1929), S. 453.]

5. Auswertung der Versuchsergebnisse. Wärmeübergang. Die gewonnenen Versuchsergebnisse bieten die Möglichkeit, die Wärmeübertragung der Platte in Abhängigkeit von der Plattenlänge x und von der Geschwindigkeit U_0 zu berechnen. Sie läßt sich auf Grund der in der Einleitung erwähnten Betrachtung aus dem Wärmeinhalt der Grenzschichtströmung ermitteln.

Die durch einen ebenen Schnitt von der Breite 1, der zur Platte senkrecht gelegt wird, in der Zeiteinheit durchtretende Wärmemenge beträgt

$$Q_{(x)} = \int_0^\delta \gamma \, c_p \, u(y) \, \vartheta(y) \, d y \left[\frac{\mathrm{WE}}{\mathrm{m \cdot s}}\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Darin bedeuten:

γ spez. Gewicht der Luft [kg/m³],
c_p spez. Wärme je Gewichtseinheit [WE/kg °C],
$C = c_p \gamma$ spez. Wärme je Volumeneinheit [WE/m³ °C],
$u(y)$ die mit y variable Geschwindigkeit in der Grenzschicht [m/s],
$t_u - t_L = \vartheta(y)$ » » y » Uebertemperatur » » » [°C],
t_u » Temperatur an der Meßstelle,
t_L » » der Außenluft,
y » senkrechte Entfernung von der Wand [m],
δ » Grenzschichtdicke [m].

(Näheres siehe Latzko a. a. O. S. 56).

Wenn man demnach den Wärmeinhalt $Q_{(x)}$ des Luftstromes längs der Platte in zwei solchen Ebenen an den Stellen x_{n+1} und x_n ermittelt, so stellt die Differenz der Wärmeinhalte $Q_{(x)n+1} - Q_{(x)n}$ die von einem Plattenstreifen der Breite 1 für die Länge $x_{n+1} - x_n$ abgegebene Wärme dar. Die in der Technik eingeführte Wärmeübergangszahl α, welche die von der Flächeneinheit abgegebene Wärme in der Zeiteinheit und für 1° C Temperaturunterschied bedeutet, läßt sich für den entsprechenden Teil der Platte aus der Differenz $Q_{(x)n+1} - Q_{(x)n}$ leicht ermitteln, wenn man diese ebenfalls auf die Längeneinheit der Platte und auf die Einheit der Temperatur bezieht.

Ich habe nun die experimentell ermittelten Temperatur- und Geschwindigkeitsverteilungskurven in Gl. (1) eingeführt (Abb. 33 bis 40) und so die durch die Luftströmung mitgeführte Wärme $Q_{(x)}$ für die vier Meßebenen ($x_h = 20, 30, 40, 50$) durch graphische Integration berechnet. Die Werte der Integranden $q = \gamma\, c_p\, u\, (t_n - t_L)$ habe ich in Abhängigkeit von y aufgetragen und berechnete aus der — von der Kurve $q = f(y)$ — eingeschlossenen Fläche die gesamte von der Platte abgeführte Wärme $Q_{(x)}$ bis zu der entsprechenden Meßstelle x. Die Wärmemengen sind mit Rücksicht auf die praktischen Anwendungen in Watt umgerechnet.

Wir wollen nun die Meßergebnisse mit den bereits erwähnten theoretischen Arbeiten von v. Kármán und Latzko, ferner mit den von E. Pohlhausen und mit den Messungen von Jürges vergleichen.

Theoretisch läßt sich die abgeführte Wärme mit Hilfe der Gl. (1) ermitteln, wenn man die Verteilungsfunktion für die Geschwindigkeiten $u(y)$ und für die Uebertemperaturen $\vartheta(y)$ aus der Grenzschichttheorie entnimmt.

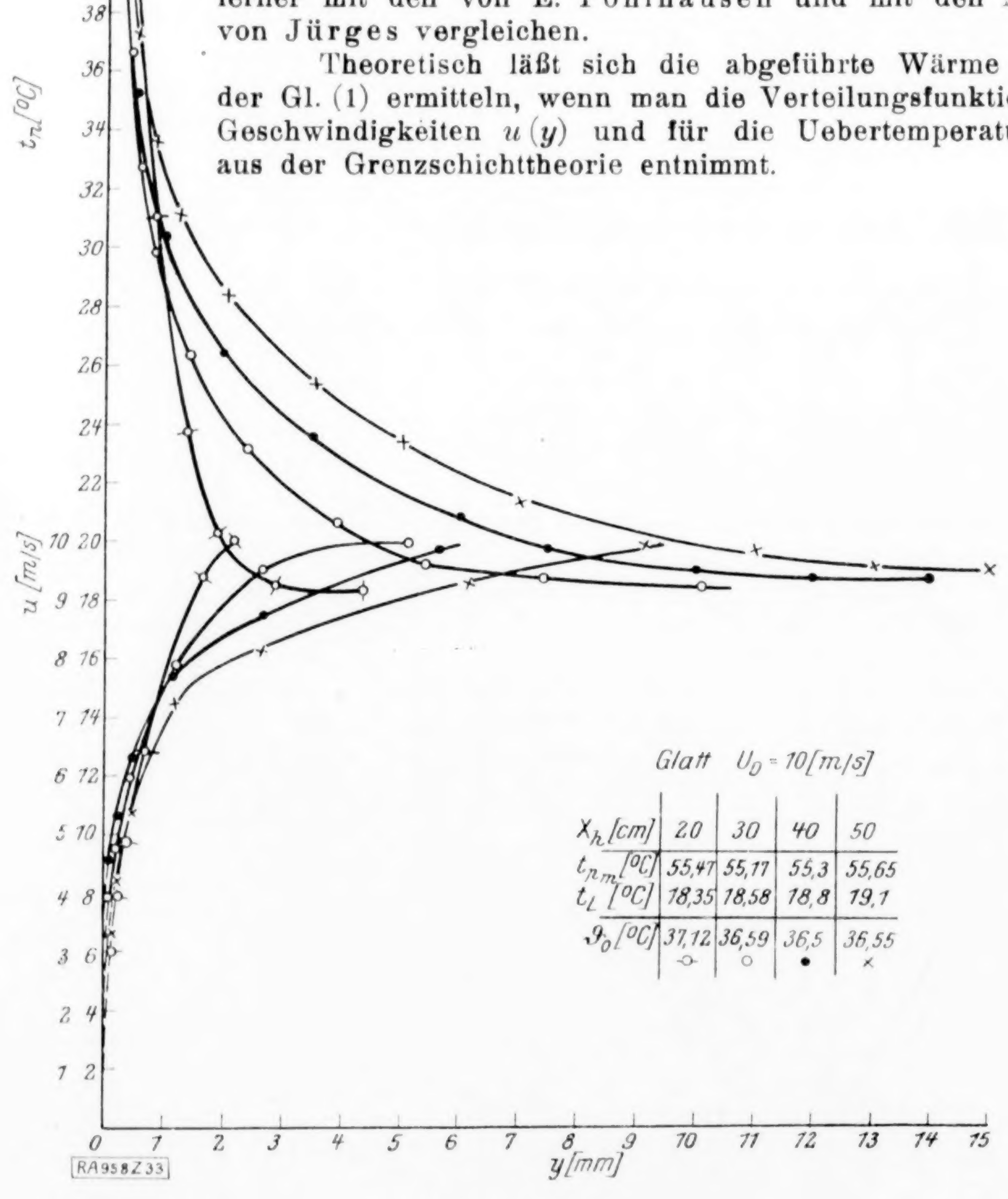


Abb. 33.

Es treten in der Theorie zwei physikalische Kenngrößen auf. Die Größe $\frac{U x}{\nu}$ wird bekanntlich als die Reynoldssche Kennzahl R_e bezeichnet. Bei Erscheinungen der Wärmeübertragung führt man außer ihr die Peclétsche Kennzahl $P_é$ ein, definiert durch die Größe $\frac{U x c_p \gamma}{\lambda}$. Man kann nachweisen, daß die Verteilungsfunktionen von u und ϑ nur dann exakt ähnlich sind, wenn die beiden Kennzahlen gleich sind, d. h. wenn $\frac{c_p \gamma \nu}{\lambda} = 1$. Bei Luft ist diese Bedingung angenähert erfüllt.

Für das laminare Gebiet sind die Funktionen $u(y)$ und $\vartheta(y)$ in Abhängigkeit von diesen Kenngrößen von E. Pohlhausen[1]) berechnet worden. Er erhält für die von einem Plattenstreifen der Breite 1 abgeführte Wärme

$$Q = \alpha(\sigma)\, \lambda\, \vartheta_0 \left(\frac{1}{Re}\right)^{1/2} \left[\frac{\mathrm{WE}}{\mathrm{m/s}}\right],$$

wobei

$$\alpha(\sigma) = \frac{1}{\varepsilon} = \frac{P\acute{e}}{Re} = \frac{c_p \gamma \nu}{\lambda}.$$

Für unseren Fall ist $\sigma = 0{,}744$ und $\alpha = 0{,}6$.

Für den turbulenten Bereich wurde die entsprechende Berechnung von v. Kármán und Latzko durchgeführt auf Grund der zuerst von Reynolds und dann von Prandtl angegebenen Analogie zwischen Reibungs-

[1]) E. Pohlhausen, Der Wärmeaustausch zwischen festen Körpern und Flüssigkeiten mit kleiner Reibung und kleiner Wärmeleitung. Diese Zeitschr. Bd. 1 (1921), S. 120.

Glatt $U_0 = 20\,[m/s]$

X_h [cm]	20	30	40	50
t_{nm} [°C]	56,3	56,4	56,9	56,7
t_L [°C]	20,1	20,25	20,5	20,75
ϑ_0 [°C]	36,2	35,15	36,4	35,95
	-o-	o	•	×

RA958Z34

Abb. 34.

und Wärmeübertragung. Diese Analogie gilt exakt nur für den Fall, wenn die **Reynolds**sche und die **Peclét**sche Zahl gleich sind. Trifft diese Annahme zu, so fallen die Verteilungsfunktionen für die Uebertemperatur und für die Geschwindigkeit zusammen, und man kann setzen:

$$u = U\left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7} \text{ und } \vartheta = \vartheta_0\left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7},$$

wobei δ zu $0{,}37\left(\frac{\nu}{U x}\right)^{1/5}$ ermittelt wurde.

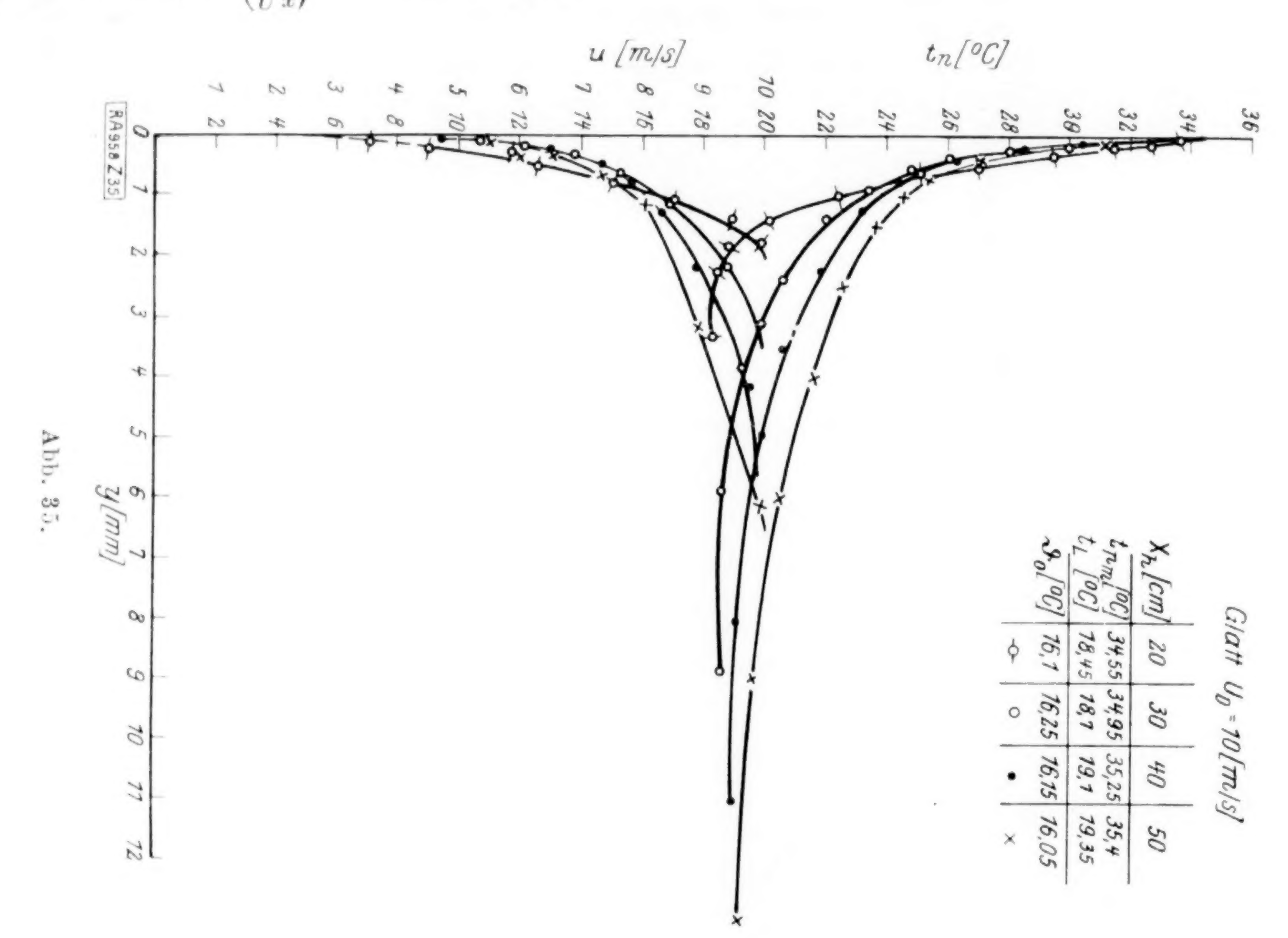


Abb. 35.

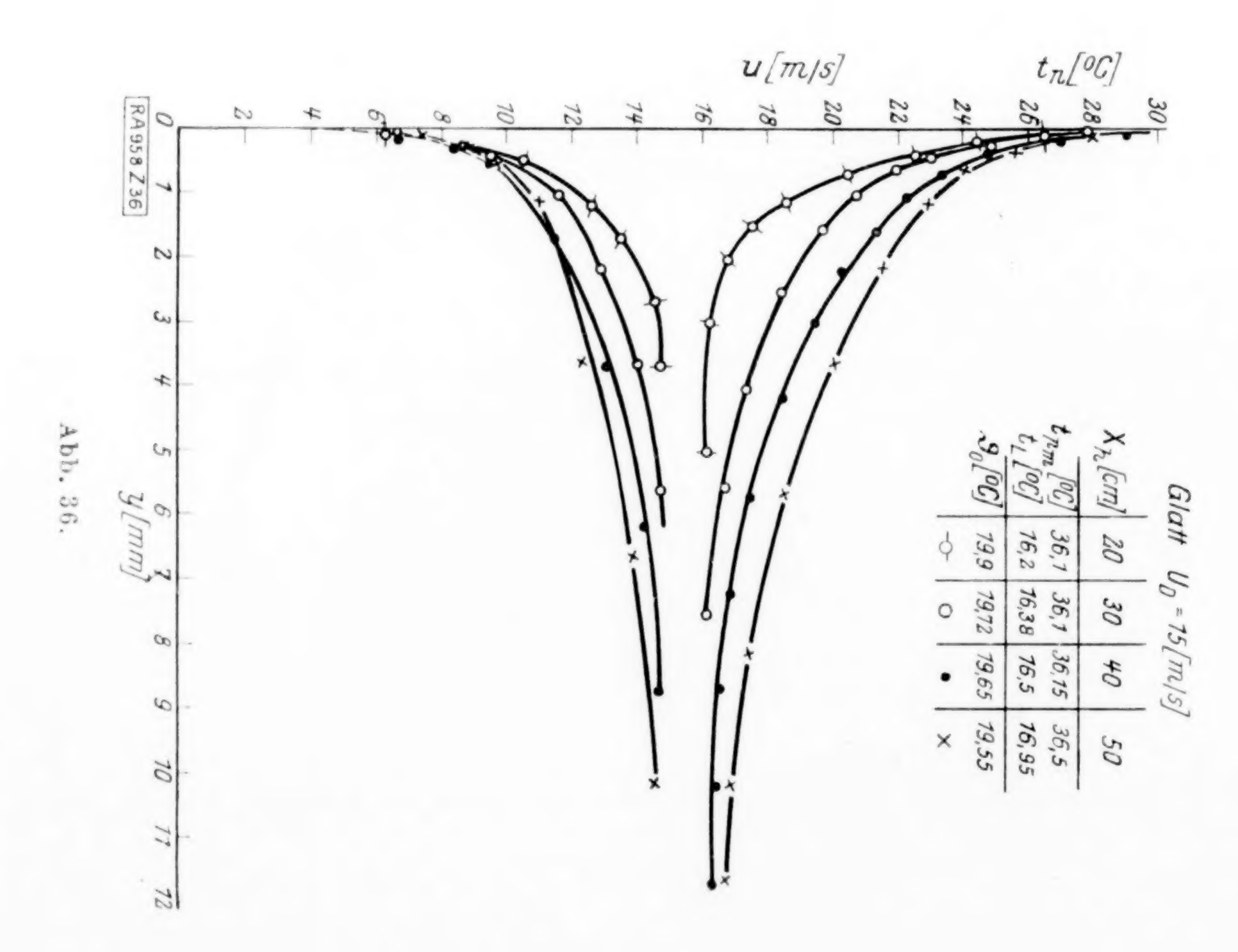


Abb. 36.

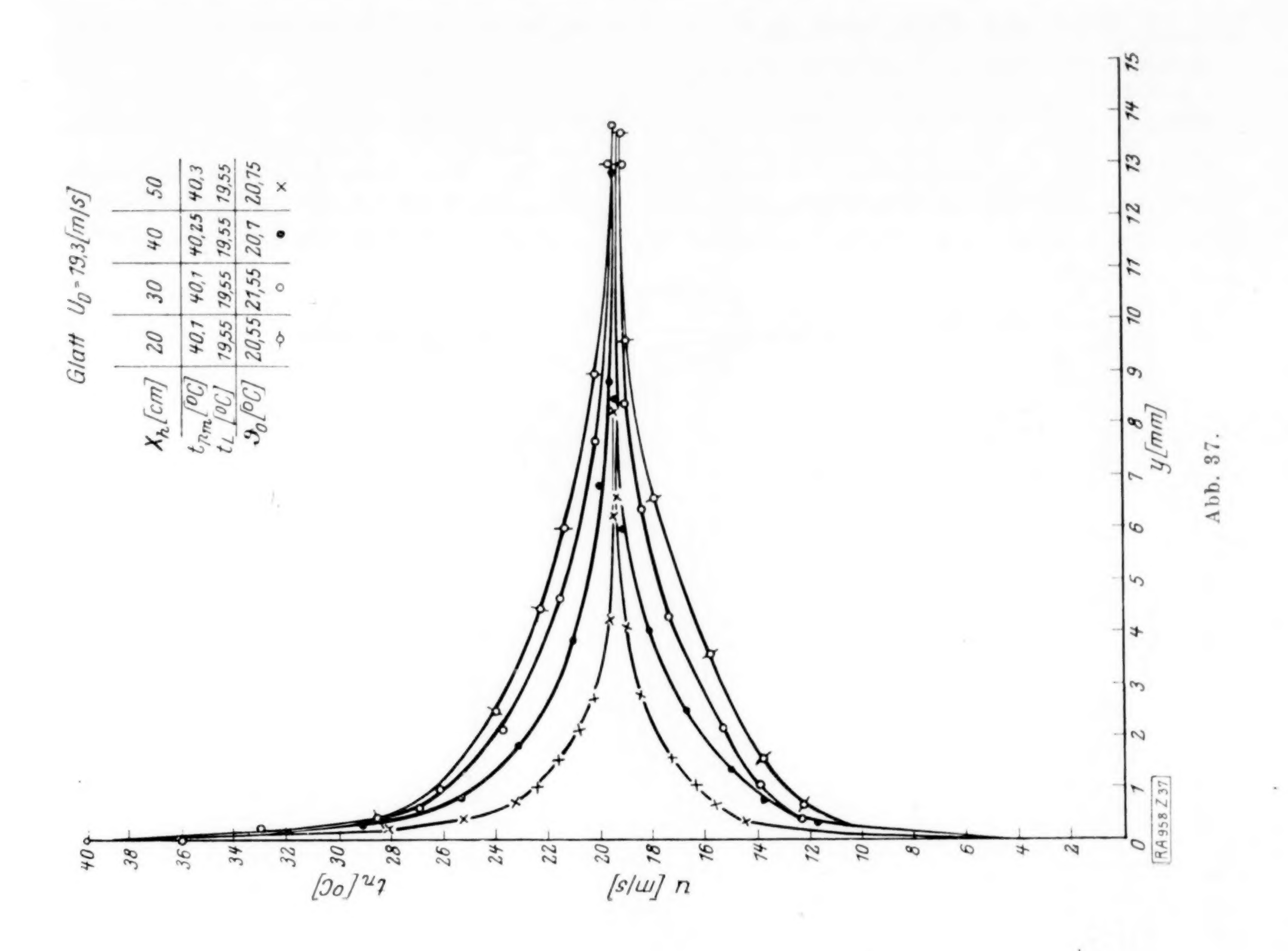

Glatt $U_0 = 19,3$ [m/s]
X_h [cm] 20 30 40 50
t_{pm} [°C] 40,1 40,1 40,25 40,3
t_L [°C] 19,55 19,55 19,55 19,55
ϑ_0 [°C] 20,55 21,55 20,7 20,75
y [mm]
u [m/s]
t_n [°C]
RA 958 Z 37

Abb. 37.

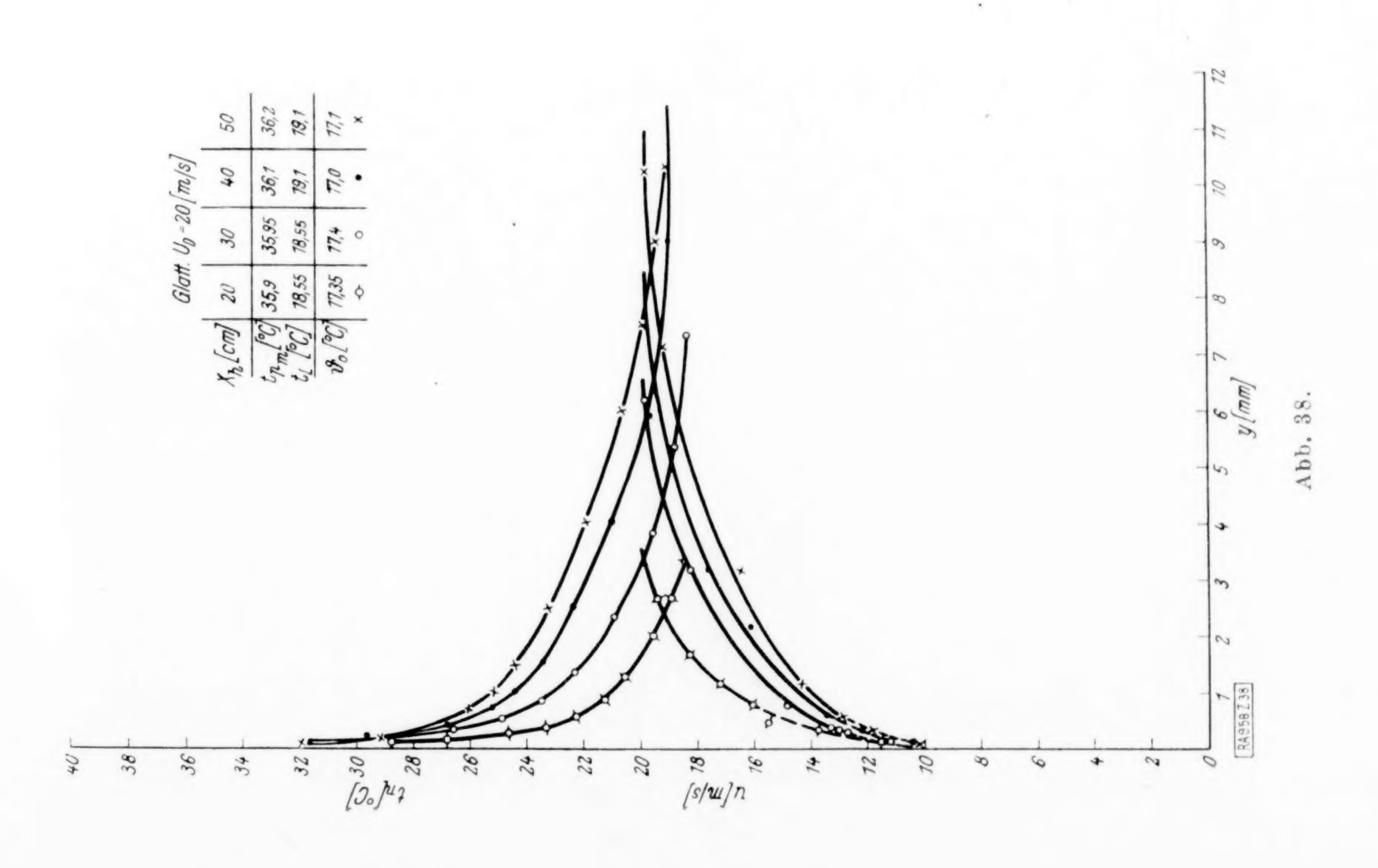

Glatt. $U_0 = 20$ [m/s]
X_h [cm] 20 30 40 50
t_{pm} [°C] 35,9 35,95 36,1 36,2
t_L [°C] 18,55 18,55 19,1 19,1
ϑ_0 [°C] 17,35 17,4 17,0 17,1
y [mm]
u [m/s]
t_n [°C]
RA958 Z 38

Abb. 38.

Führt man diese Werte in Gl. (1) ein, so ergibt sich für die von einem Plattenstreifen der Breite 1 abgeführte Wärme $Q = 0{,}0356 \cdot C\, U\, \vartheta_0\, x \left(\frac{1}{R_e}\right)^{1/5} \left[\frac{\mathrm{WE}}{\mathrm{m \cdot s}}\right]$. Da für wirkliche Gase $\frac{R_e}{P_e} = \varepsilon$ von 1 verschieden ist, so liegt eine gewisse Willkür darin, daß in der Formel die Reynoldssche Kennzahl eingeführt ist. Man kann indessen die zu erwartende Abweichung abschätzen, wenn man in die Formel statt der Reynoldsschen die

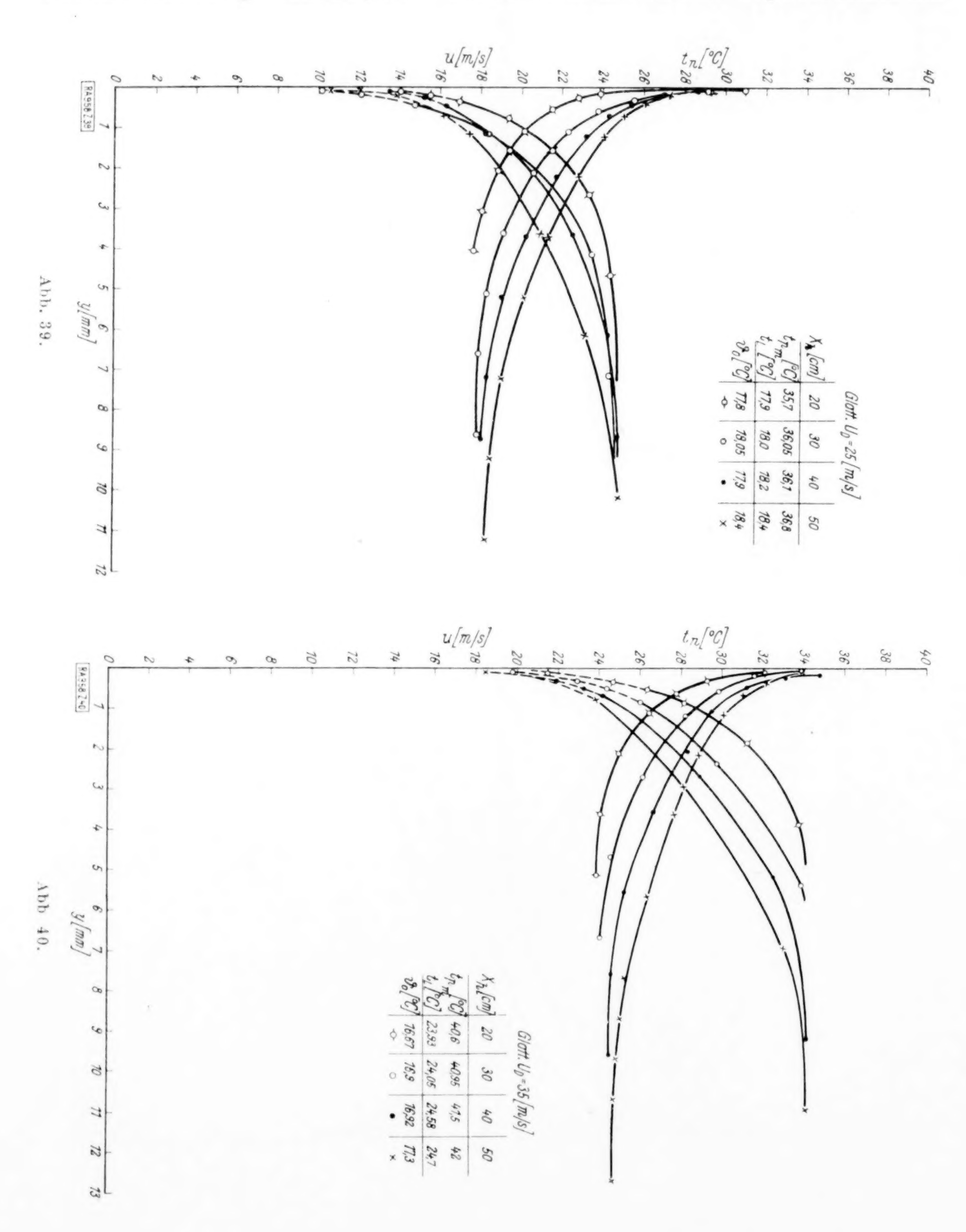


Abb. 39.

Abb. 40.

Peclétsche Kennzahl einsetzt. Der Wert des Wärmeübergangs ändert sich dann im Verhältnis von $\sqrt[5]{\varepsilon} = \sqrt[5]{1{,}345} = 1{,}061$. Die Annäherung der Theorie beträgt mithin 6 vH.

In Abb. 41 und 42 ist die durch die Platte abgeführte Wärme für 1 m² Oberfläche, 1 m je Sekunde Geschwindigkeit des ungestörten Luftstromes und 1° C Temperaturdifferenz in Abhängigkeit von $U \cdot x_h$ und $U \cdot x_{th}$ bzw. von den Kennzahlen R_e bzw. P_e' dargestellt; x_h bedeutet die Entfernung von der Anströmkante und x_{th} die Entfernung vom Beginn der thermischen Einwirkung. Diese doppelte Darstellung erschien angemessen,

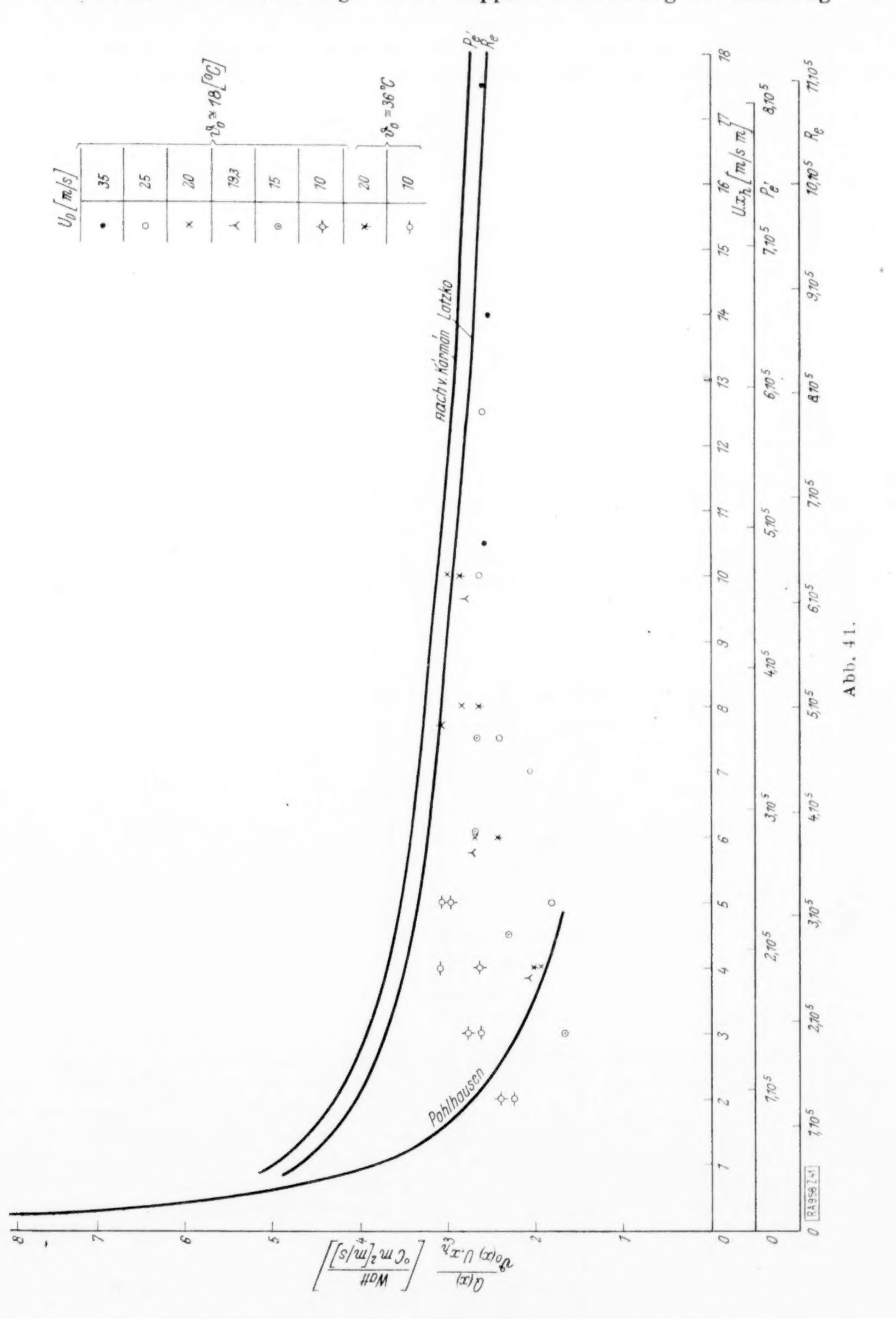


Abb. 41.

weil nach den theoretischen Betrachtungen eine Analogie zwischen Reibung und Wärmeübertragung nur dann vorhanden ist, wenn die Grenzbedingungen für beide Fälle gleich sind, d. h. der Beginn der thermischen und der hydrodynamischen Einwirkung zusammenfallen. Da wir eine ungeheizte Anströmkante (spitz, 10 cm lang) hatten, so war obige Bedingung nicht erfüllt. Wir fanden jedoch aus dem Vergleich der entsprechenden Temperatur- und Geschwindigkeitsverteilungskurven, daß ein Unterschied zwischen diesen nur bei laminarer Strömung, etwa bei $U_D = 10$ m/s, vorhanden ist, daß aber, sobald turbulente Strömung auftritt, die Temperatur- und Geschwindigkeitsverteilungskurven, auf gleichem Maßstab umgezeichnet, kongruent verlaufen und daß nur für die erste Meßstelle $x_h = 20$ cm zwischen Temperatur- und Geschwindigkeitsverteilungskurve ein ganz geringer Unterschied vorhanden ist. Man kann daraus folgern, daß durch die ausgleichende

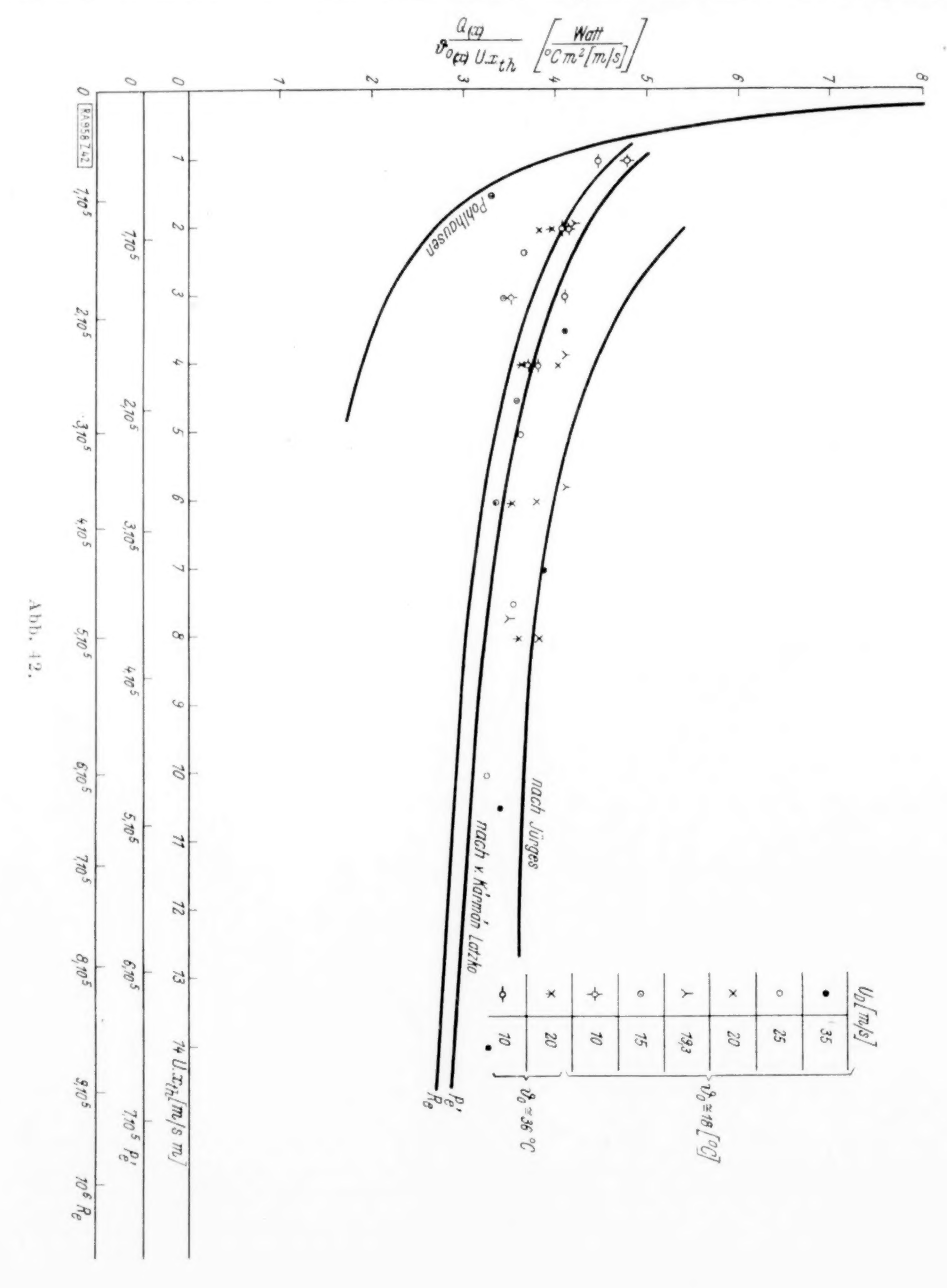


Abb. 42.

Wirkung der Turbulenz auch der Unterschied, der dadurch entsteht, daß die thermische Einwirkung erst später einsetzt, allmählich längs der Platte ausgeglichen wird, und daß dadurch auch die thermischen Vorgänge so verlaufen, als wenn der Beginn ihrer Einwirkung mit demjenigen der hydrodynamischen zusammenfiele. Dieser Ausgleich kann längs der Platte offenbar nur dann vollständig eintreten, wenn die Anlaufstrecke verhältnismäßig klein ist gegen die Länge der geheizten Strecke der Platte.

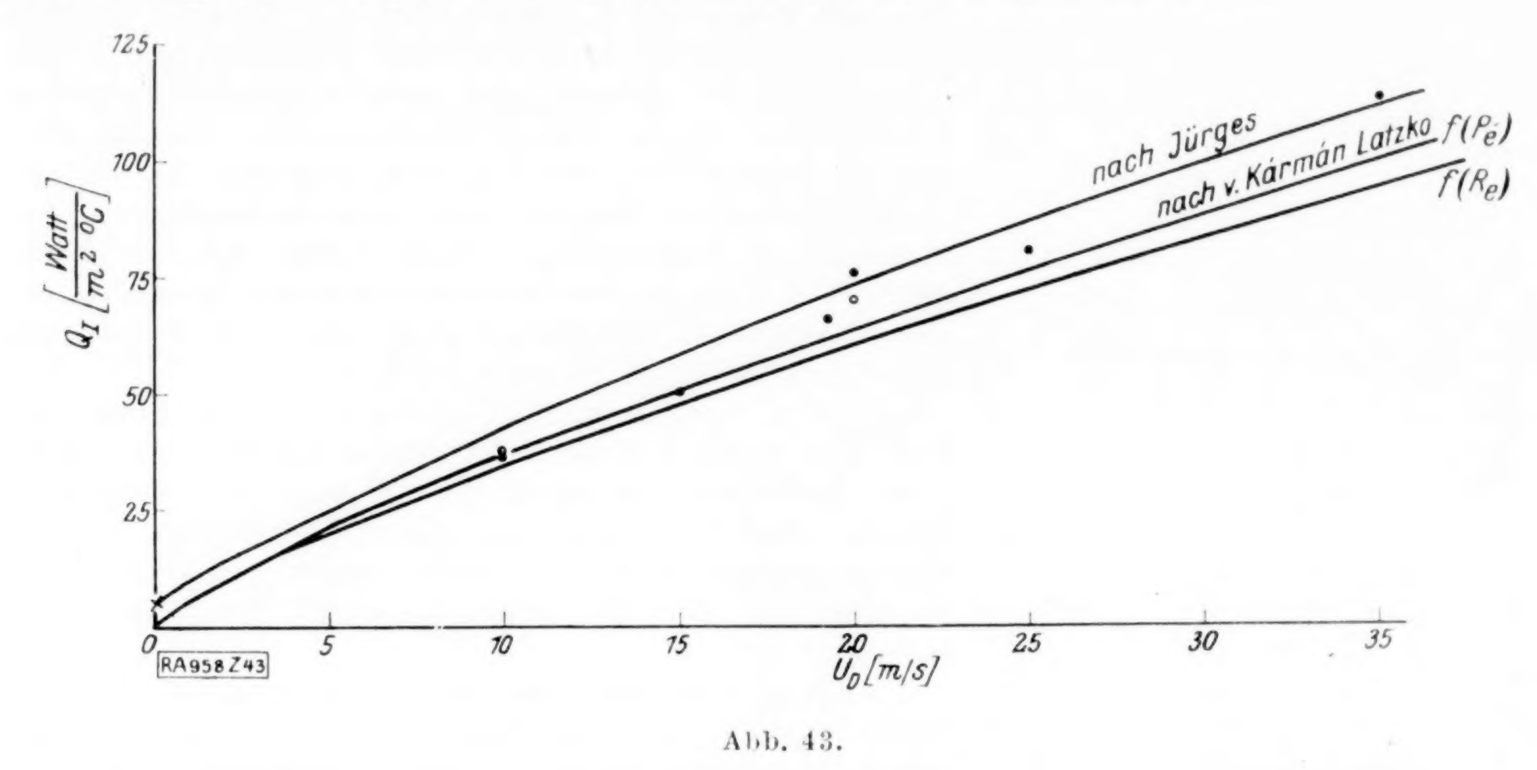


Abb. 43.

Vergleicht man die Meßergebnisse mit den oben angeführten theoretischen Formeln, so sieht man zunächst, daß die Wärmeübergangszahl bis etwa für $R_e = 2 \cdot 10^5$ gut mit der Pohlhausenschen Funktion übereinstimmt. Zwischen Reynoldsschen Zahlen von $2 \cdot 10^5$ bis $5 \cdot 10^5$ weisen die Verhältnisse keinen eindeutigen Charakter auf. In diesem Gebiet ist die Strömungsform längs der Platte weder überall laminar noch überall turbulent.

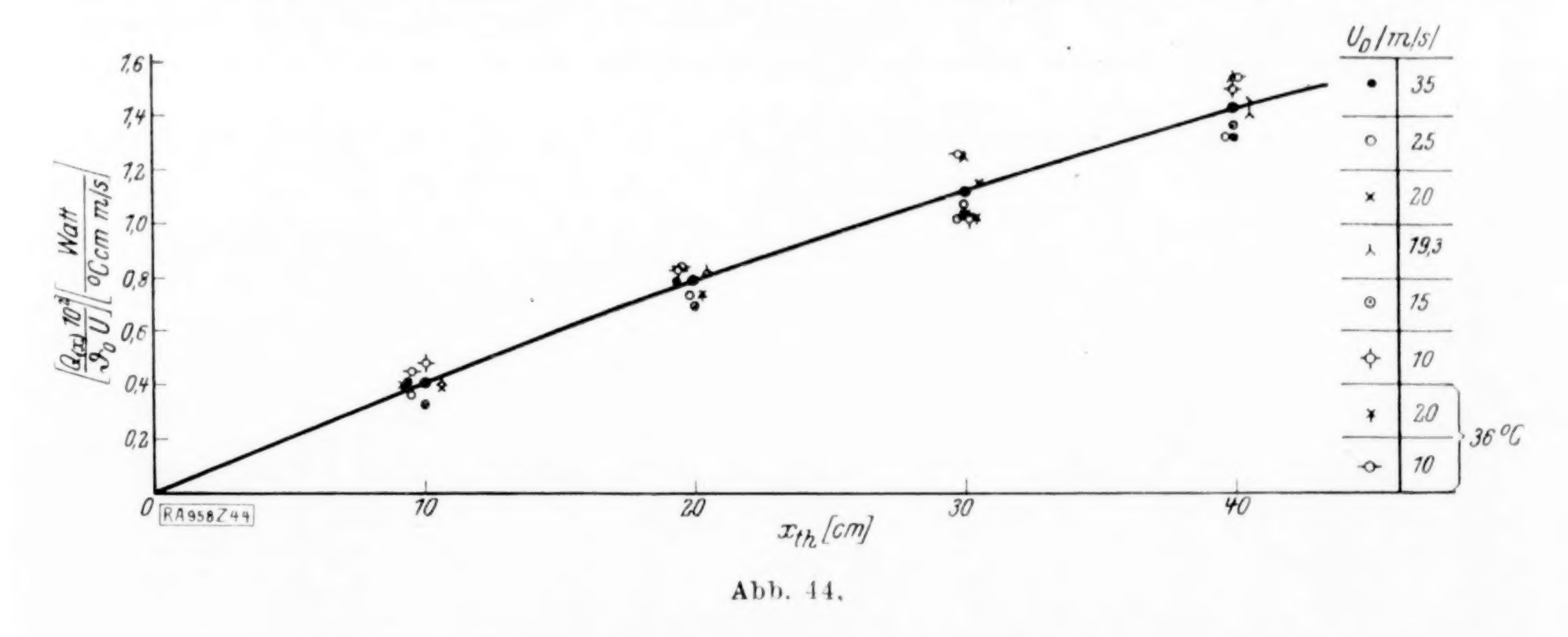


Abb. 44.

Die zu gleicher Geschwindigkeit U_D gehörenden Meßpunkte liefern für die abgeführte Wärme Kurven, die den von Blasius und Gebers[1]) für den Strömungswiderstand gefundenen analog sind.

Für Reynoldssche Zahlen zwischen $5 \cdot 10^6$ und $11 \cdot 10^6$ zeigen die Meßergebnisse genügende Uebereinstimmung mit der v. Kármán-Latzkoschen Kurve, insbesondere wenn man die Plattenlänge von dem Beginn der thermischen Einwirkung an rechnet. Es muß dabei berücksichtigt werden, daß die Methode, die wir zur Ermittlung der Wärmemenge angewendet haben, an die Meßgenauigkeit sehr große Anforderungen stellt,

[1]) Ergebnisse der Aerodyn. Versuchsanstalt zu Göttingen, III. Lieferung, S. 5.

so daß die Streuungen naturgemäß größer sind als wenn (wie es bisher immer geschehen ist) die Wärmemenge durch eine unmittelbare Messung bestimmt wird.

Die Abb. 42 enthält eine Kurve, die aus den Messungen von Jürges (s. Anm. 5 auf S. 435)[1] entnommen und zum Vergleich eingetragen ist. Jürges findet eine sehr bedeutende Abweichung zwischen der von ihm gemessenen und nach v. Kármán-Latzko berechneten Wärmemenge. Unserer Ansicht nach ist dies auf folgenden Umstand zurückzuführen. Jürges benutzt genau so wie wir eine 50 cm lange Platte. Vor dieser ist jedoch eine hydrodynamische Anlaufstrecke von 31 cm Länge eingeschaltet. Es ist klar, daß in diesem Falle die Voraussetzung der Theorie (zusammenfallender Beginn der hydrodynamischen und thermischen Einwirkung) nicht erfüllt ist. Während bei uns die Länge der hydrodynamischen Anlaufstrecke zur thermischen Meßlänge sich wie 1 : 5 verhält, ist dies Verhältnis bei Jürges rund 3 : 5.

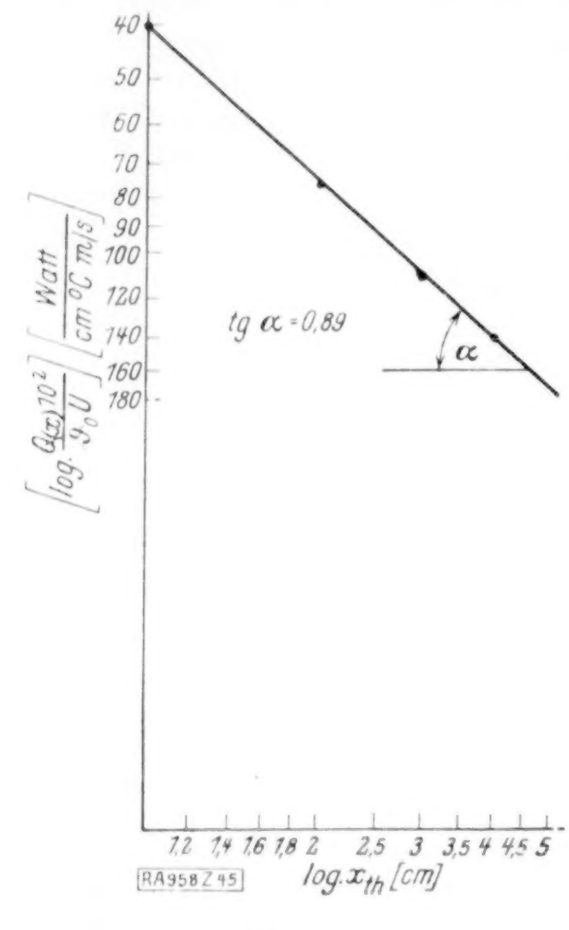


Abb. 45.

Wir vermuten, daß Jürges[2]) und auch ten Bosch[3]) in die Latzkosche Formel für die Reynoldssche Zahl die Gesamtlänge 31 + 50 cm eingeführt haben, wodurch man naturgemäß für die Wärmeübergangszahl kleinere Werte erhält, die mit den Ergebnissen des Experiments nicht übereinstimmen können.

Wie man aus unserer Darstellung in Abb. 42 sieht, werden die Abweichungen der Jürgesschen Werte bedeutend kleiner. Meine Meßpunkte sind für den Bereich $R_e = 3 \cdot 10^5$ bis $7 \cdot 10^5$ mit den Jürgesschen in guter Uebereinstimmung; für kleinere und größere Kennzahlen liegen die Jürgesschen Meßpunkte etwas höher, wobei meine Meßpunkte den theoretischen Kurven näher zu liegen kommen.

Wir hatten ferner in Abb. 43 die abgeführte Wärme in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit in Watt je 1 m² Oberfläche und 1° C Temperaturdifferenz dargestellt. Die eingetragenen Meßpunkte entsprechen den Meßwerten, die wir an der Stelle $x_{th} = 50$ cm

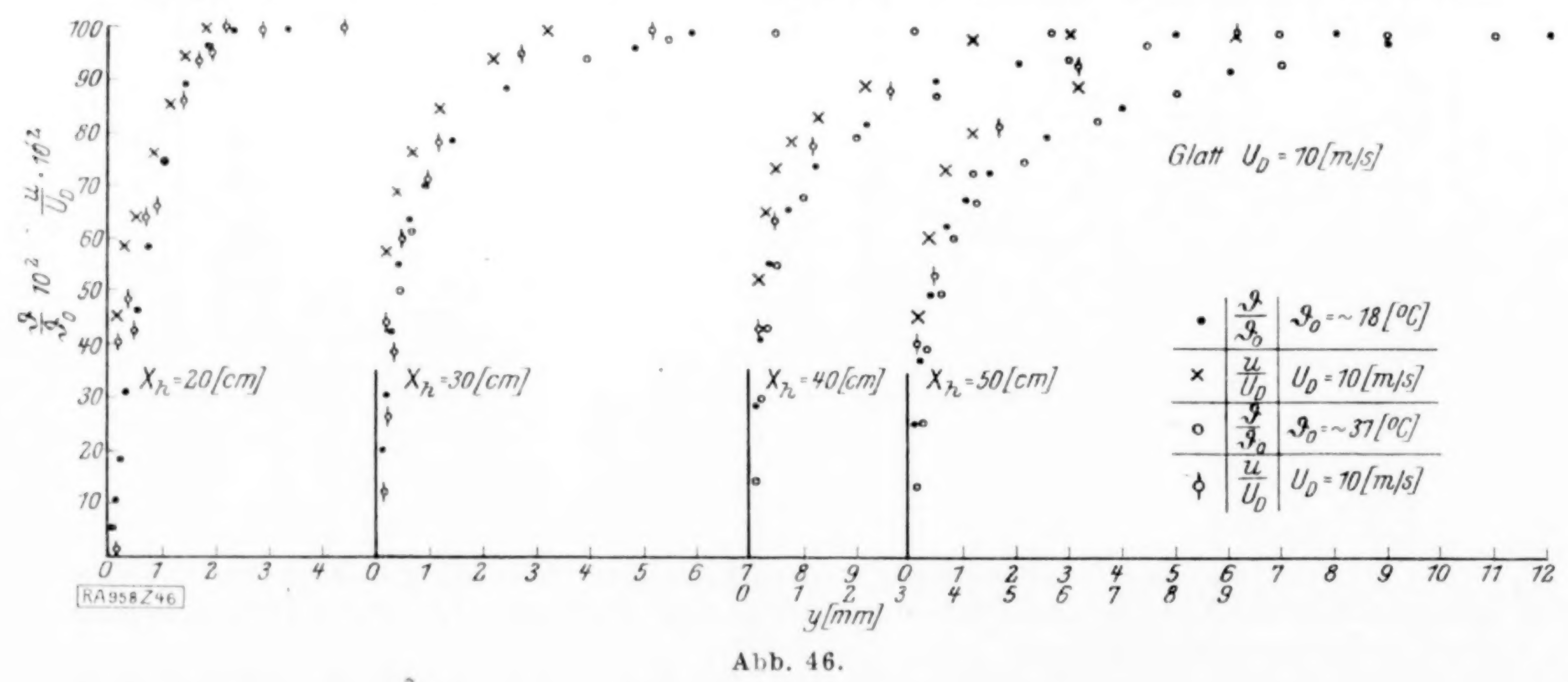


Abb. 46.

aus der Gl. $Q_{(x)} = \int_0^\delta \gamma \cdot c_p \cdot u\,(t_n - t_L)\, dy$ graphisch ermittelten. Zum Vergleich haben wir die entsprechenden Kurven, die wir nach der v. Kármán-Latzkoschen Arbeit, ferner

[1]) Diese Zeitschr. Bd. 9 (1929).
[2]) Siehe a. a. O. S. 45.
[3]) ten Bosch, Die Wärmeübertragung. Berlin 1927, S. 125.

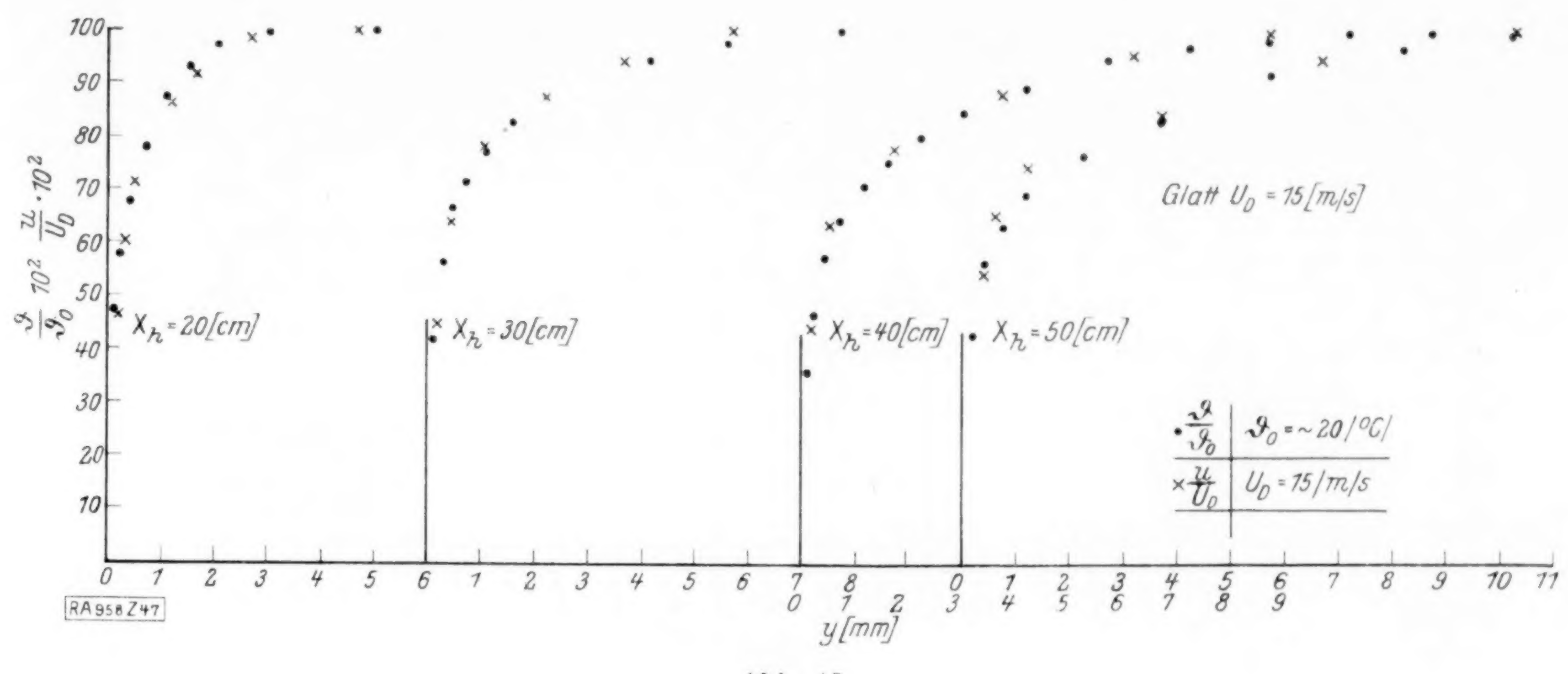


Abb. 47.

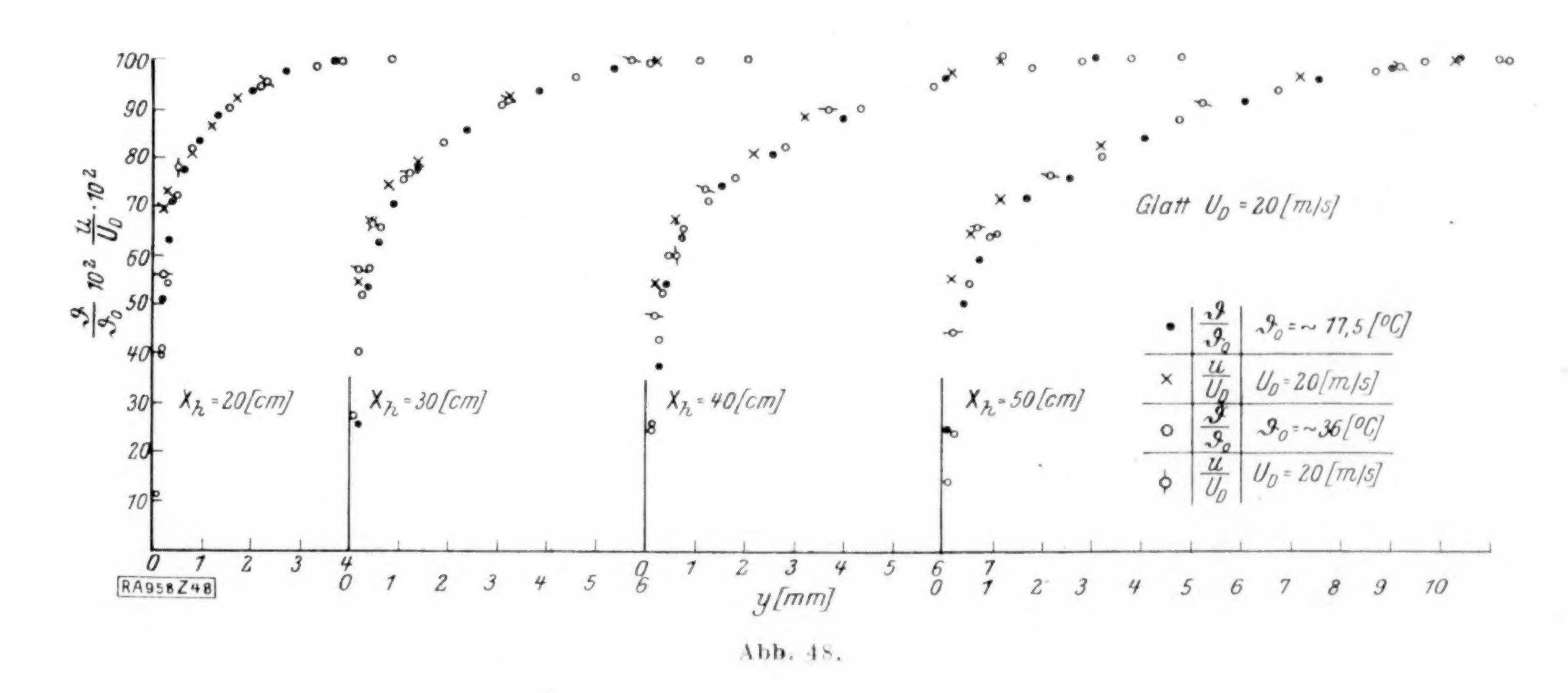


Abb. 48.

Abb. 49.

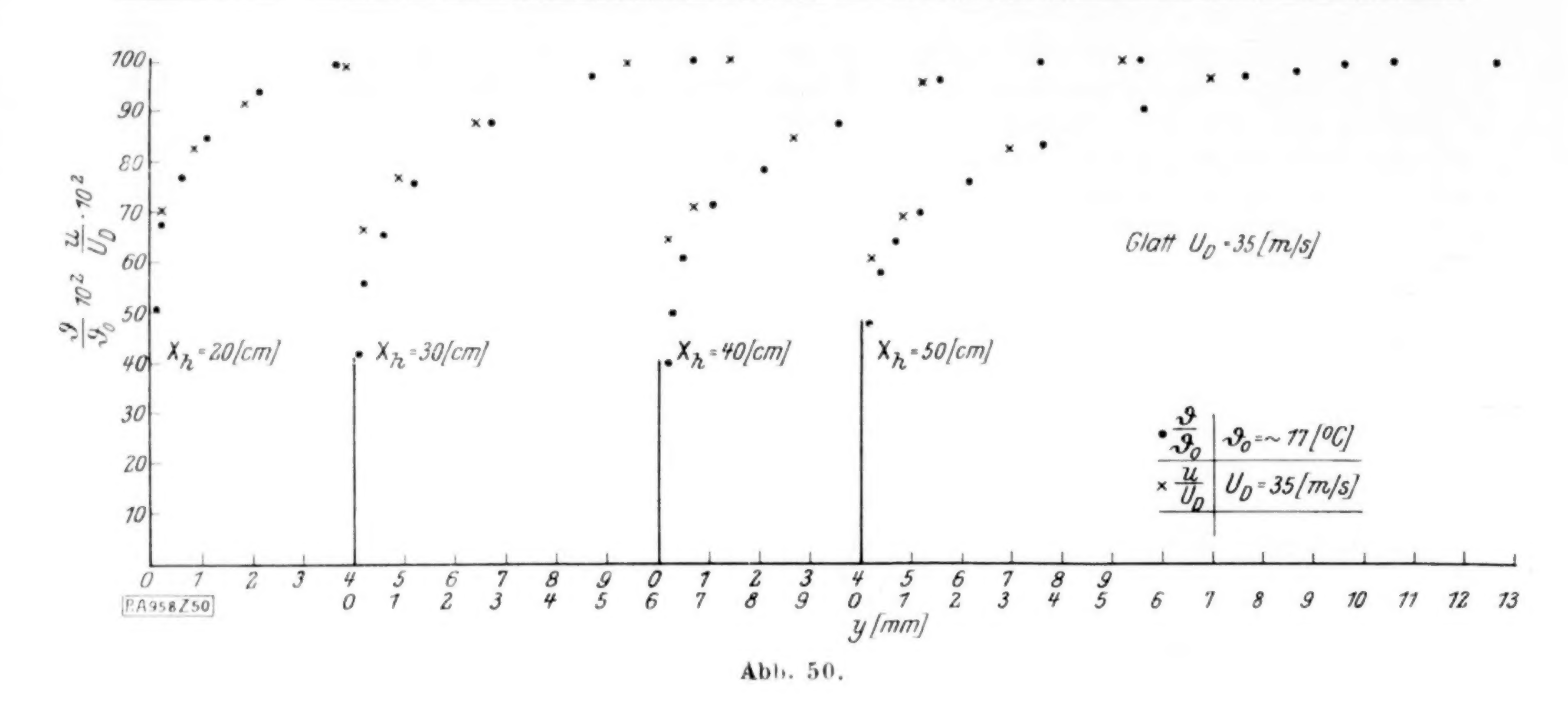


Abb. 50.

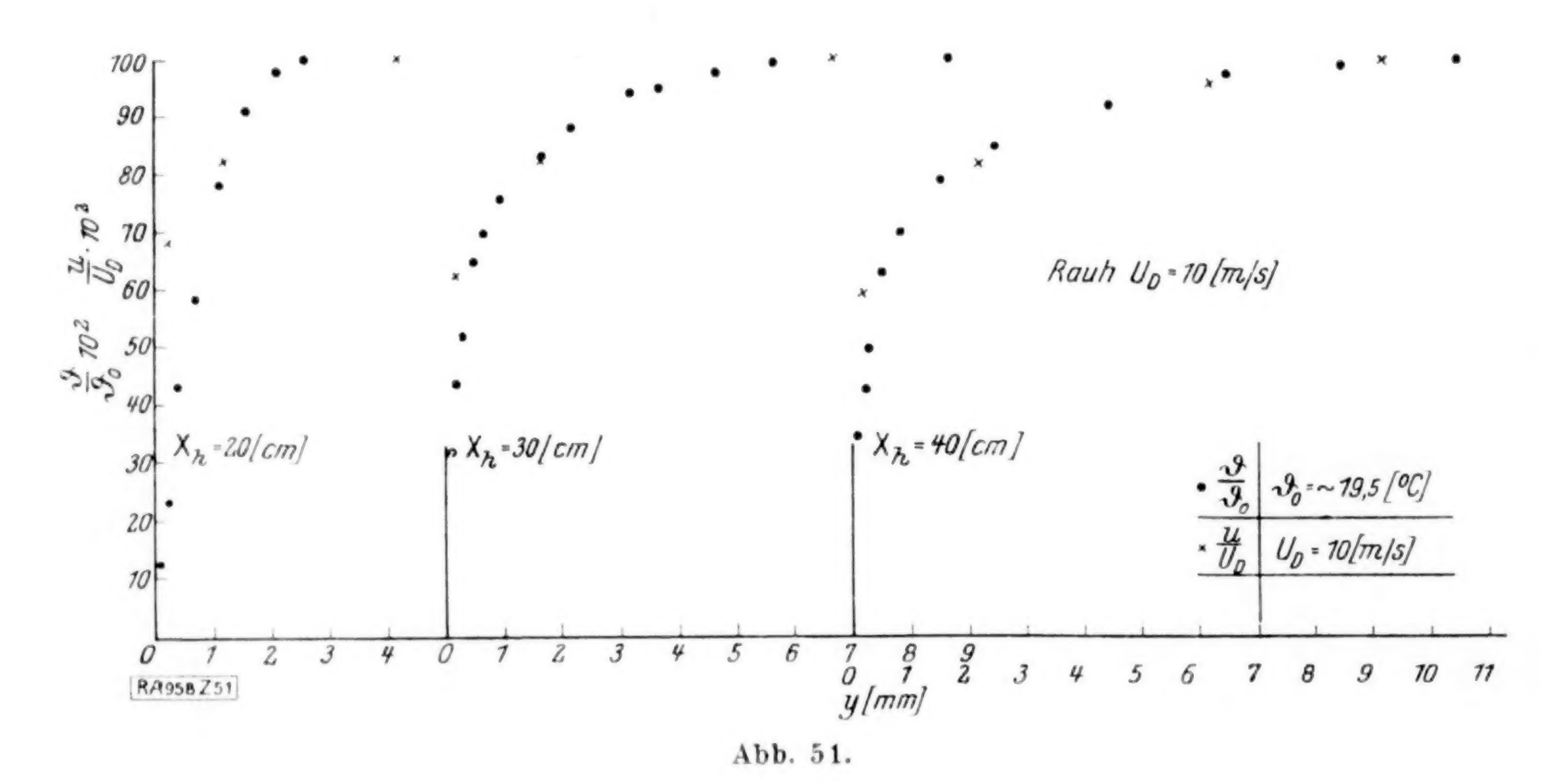


Abb. 51.

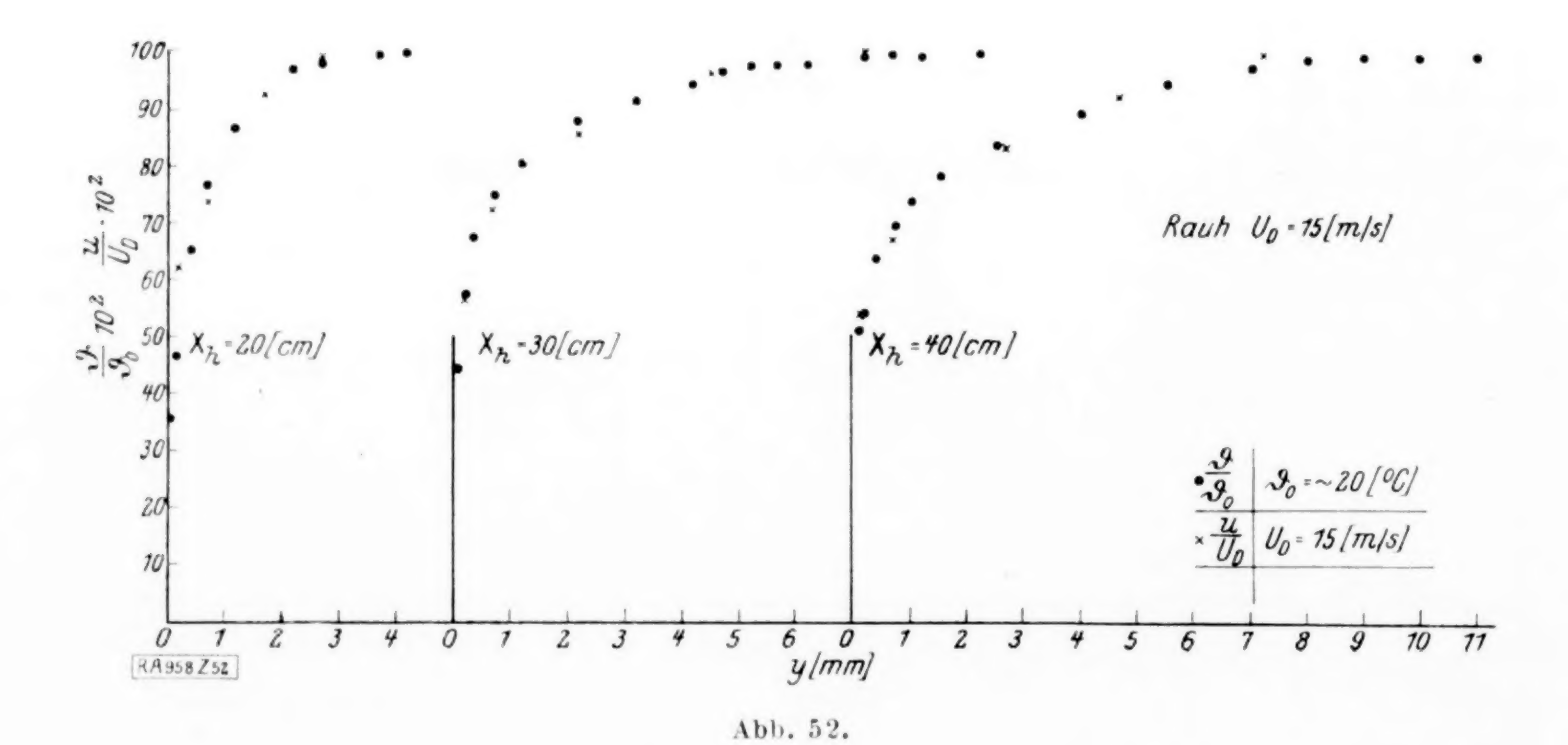


Abb. 52.

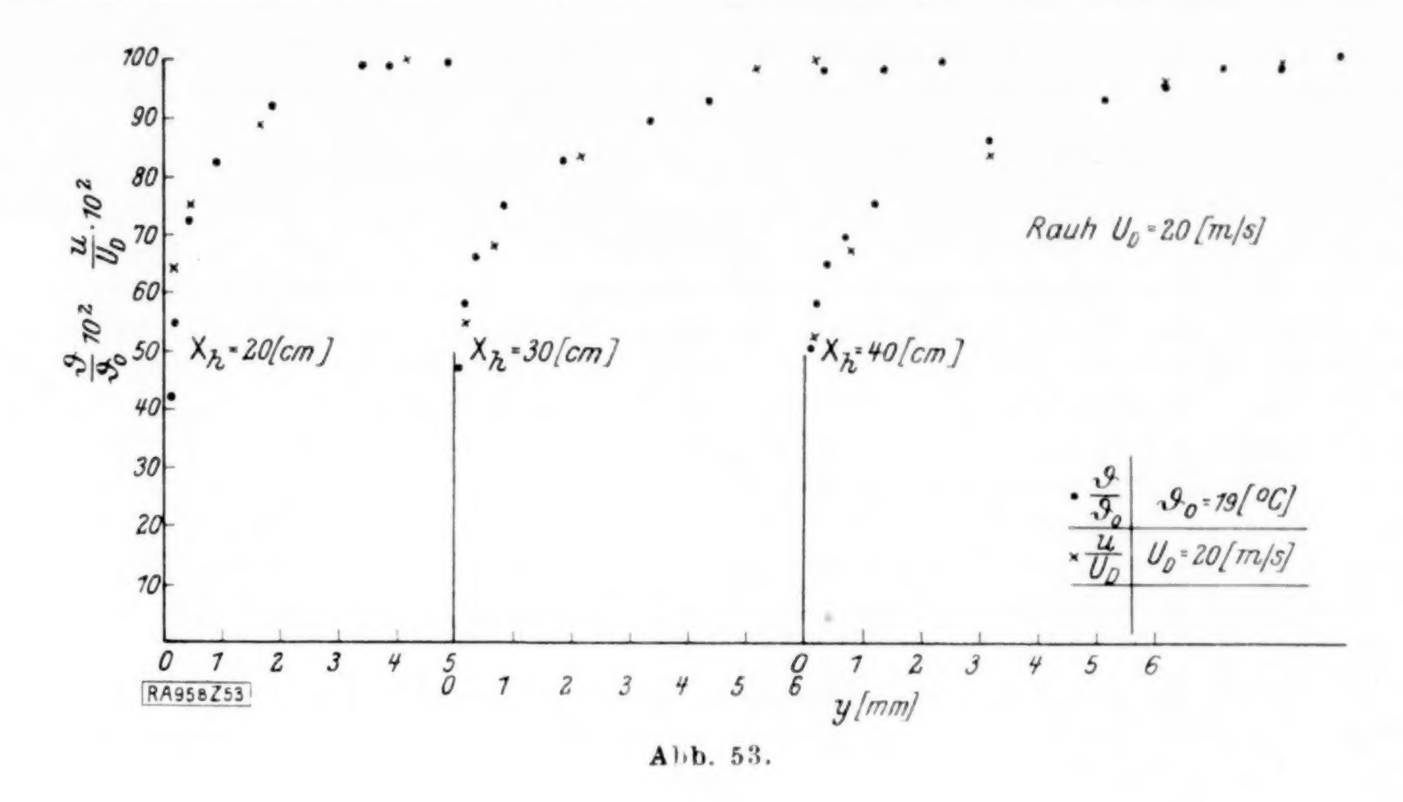


Abb. 53.

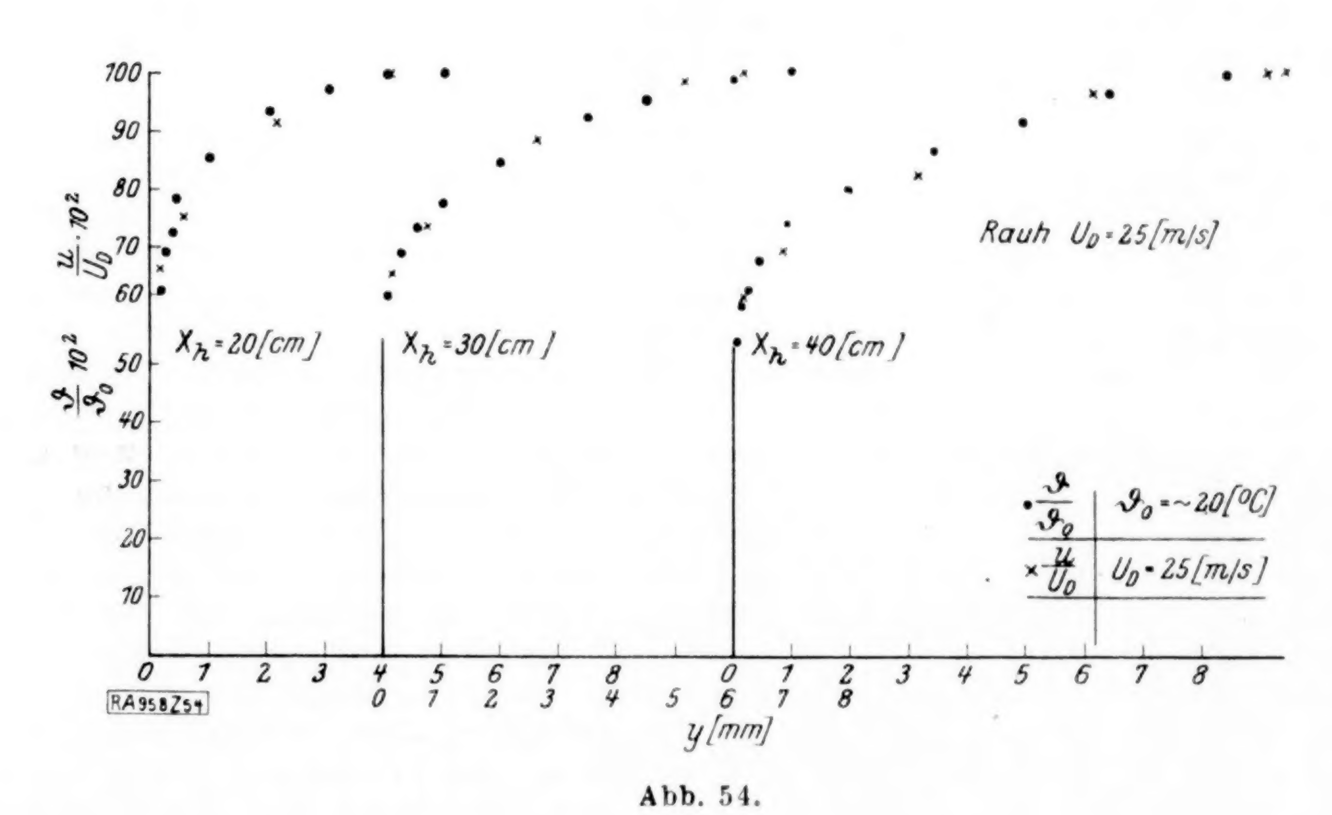


Abb. 54.

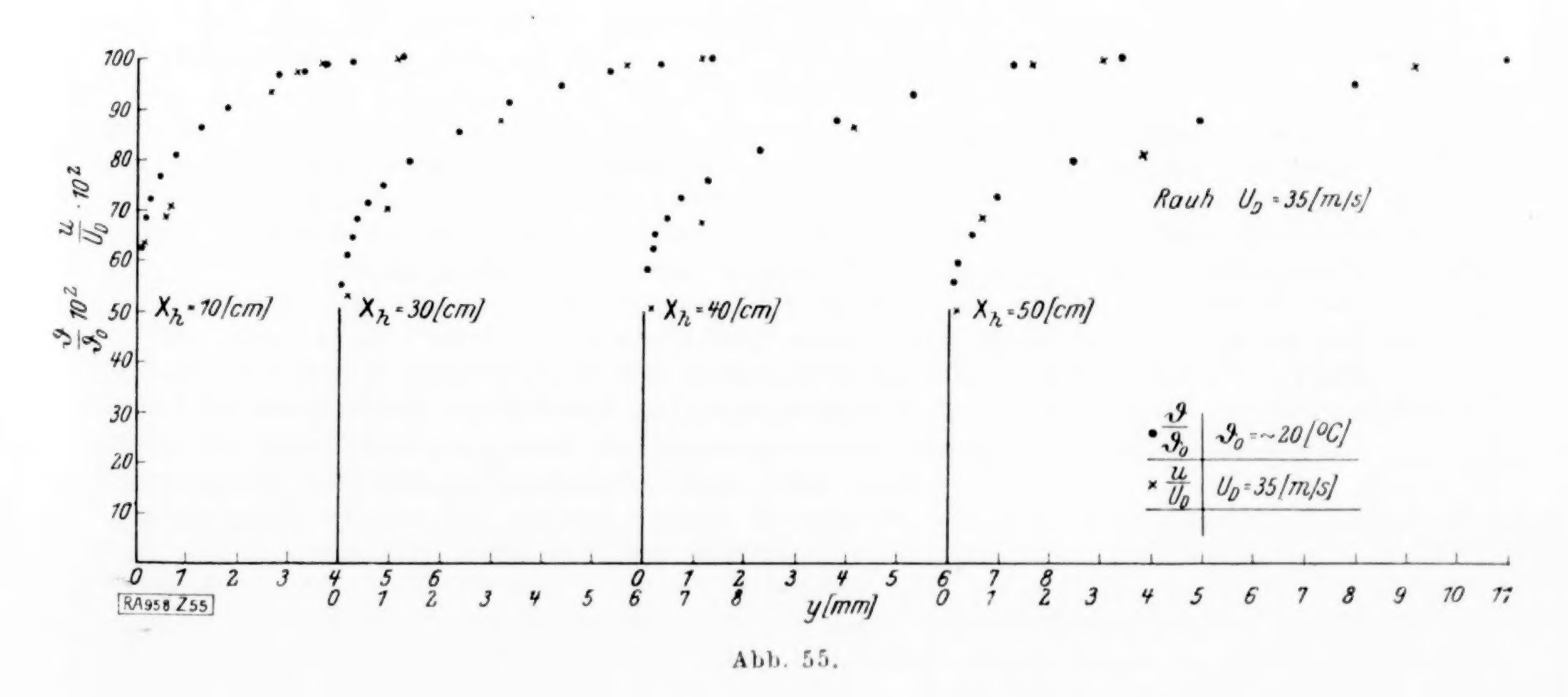


Abb. 55.

nach den Jürgesschen Versuchsergebnissen ermittelt haben, ebenfalls eingetragen. Es mußte hier ebenfalls durch die Einführung der Pécletschen Kennzahl berücksichtigt werden, daß bei unseren Versuchen $\frac{\lambda}{c_p \cdot \gamma \cdot \nu} \neq 1$ sondern $= 1{,}345$ war.

Unsere Meßpunkte stimmen mit der theoretischen Kurve $f(P_é)$ gut überein. Größere Streuung, etwa 14 vH, weisen nur zwei Meßpunkte für $U_D = 20$ bzw. 35 m/s auf.

Um die Abhängigkeit der Wärmeübertragung von der Plattenlänge darzustellen, sind in Abb. 44 die Werte $Q_{(x)}/\vartheta_0 U$ als Funktion von x_{th} eingetragen, entsprechend den untersuchten vier Meßstellen $x_{th} = 20$, 30, 40, 50 cm. Zur Darstellung haben wir Mittelwerte der acht Meßpunkte gebildet, die zu den untersuchten acht Geschwindigkeiten zwischen $U_D = 10$ m/s und $U_D = 35$ m/s gehören. Die so gefundenen Punkte konnten durch eine glatte Kurve verbunden werden. Diese Punkte haben wir auch in logarithmischem Maßstab aufgetragen, Abb. 45. Durch diese konnten wir mit genügender Genauigkeit eine Gerade legen, woraus sich ergibt, daß man $Q_{(x)}/\vartheta_0 U$ als eine Potenzfunktion der Plattenlänge x_{th} ausdrücken kann mit einem Exponenten, der durch die Neigung der Geraden gegeben ist. Sein Wert ist $n = 0{,}89$.

6. Nachweis der Analogie zwischen Strömungswiderstand und Wärmeübertragung. Es ist für die Theorie von großem Interesse, wie weit die Analogie zwischen Strömungswiderstand und Wärmeübertragung durch unsere Versuchsergebnisse bestätigt wird.

Die Meßergebnisse der vorliegenden Arbeit bieten nun die Möglichkeit, sowohl die Temperaturfelder mit den entsprechenden Geschwindigkeitsfeldern, als auch den Strömungswiderstand mit der Wärmeübertragung zu vergleichen.

Zum Vergleich des Temperatur- und des Geschwindigkeitsfeldes ist folgende Darstellung zweckmäßig: An der Platte $y = 0$ hat die Temperatur ihren Höchstwert, während die Geschwindigkeit gleich 0 ist. An der Grenzschicht für $y = \delta$ ist die Uebertemperatur gleich 0, während die Geschwindigkeit ihren Höchstwert, den des ungestörten Luftstromes, erreicht. Um für die Temperaturverteilungskurven den gleichen Charakter und gleiche Grenzbedingungen wie für die Geschwindigkeitsverteilungskurven zu erhalten, wurde als Variable die Differenz »Plattentemperatur minus Grenzschichttemperatur« aufgetragen. Diese Kurve hat tatsächlich den gleichen Charakter wie die Geschwindigkeitsverteilungskurve. Um die beiden Kurven in gleichem Maßstab darzustellen, wurde noch die Geschwindigkeit $100\, u/U$ in vH der Geschwindigkeit der ungestörten Luftströmung und die Temperaturwerte $100\, \vartheta/\vartheta_0$ in vH der Uebertemperatur der Platte ausgedrückt. Die so gewonnenen Kurven sind in den Abb. 46 bis 55 dargestellt. Man sieht, daß die entsprechenden Temperatur- und Geschwindigkeitsverteilungskurven im Einklang mit der Aehnlichkeitstheorie nach Prandtl (s. a. O.) für Geschwindigkeiten von etwa 15 m/s aufwärts (wobei schon längs der Platte turbulente Strömung herrscht) sehr schön kongruent verlaufen. Größere Abweichung kann nur bei der geringsten untersuchten Geschwindigkeit $U_D = 10$ m/s (bei der längs der Platte im wesentlichen noch laminare Strömung herrschte) festgestellt werden. Die gute Uebereinstimmung der Temperatur- und Geschwindigkeitsfelder trotz dem erst späteren Einsetzen der thermischen Einwirkung läßt sich durch die ausgleichende Wirkung der auftretenden Turbulenz erklären. Auf die Folgerungen aus dieser Erscheinung ist auf S. 9 näher eingegangen.

7. Zusammenfassung. In vorliegender Arbeit ist das Temperatur- und das Geschwindigkeitsfeld in der hydrodynamischen Grenzschicht einer geheizten Platte experimentell ermittelt worden. Aus den Meßergebnissen wurde die Wärmeübertragung an strömende Luft berechnet. Zur Messung der Temperaturfelder in der Grenzschicht wurde durch systematische Untersuchung ein geeignetes Thermoelement ausgebildet.

Die Versuchsergebnisse sind in guter Uebereinstimmung mit den theoretischen Lösungen dieses Problems nach v. Kármán und Prandtl.

Sie haben den Nachweis für die Aehnlichkeit der Geschwindigkeit und Temperaturfelder bzw. für die Analogie zwischen Strömungswiderstand und Wärmeübertragung erbracht.

8. Schlußwort. Vorliegende Arbeit entstand auf Anregung des Herrn Professor Dr. Th. von Kármán, des Vorstehers des Aerodynamischen Instituts der Technischen Hochschule Aachen. Die Versuche wurden in diesem Institut mit Mitteln durchgeführt, welche im wesentlichen durch die Notgemeinschaft der Deutschen Wissenschaft zur Verfügung gestellt wurden.

Herrn Professor v. Kármán habe ich für die wertvolle Anregung und Unterstützung, welche er dieser Arbeit zukommen ließ, meinen besten Dank zu sagen. 958

Bestimmung von Balkenspannungen mit Hilfe der Variationsrechnung.

Von WILLIAM HOVGAARD in Massachusetts.
(Deutsch von J. Malkin in Berlin-Charlottenburg.)

Das Problem, von dem nachstehend die Rede ist, wurde zuerst von de Saint-Vénant und in der Folge von Clebsch behandelt. Saint-Vénant entwickelte die Theorie der Torsion und Biegung von Stäben und gab insbesondere ein Verfahren zur Ermittelung der Verschiebungen, Verzerrungen und Spannungen in einem zylindrischen Balken an, der an einem Ende eingespannt und am andern Ende belastet ist. Den zwei klassischen Arbeiten[1]), in denen er die Lösung dieses Problems veröffentlichte, liegt die Voraussetzung zugrunde, daß die Verschiebungen zum Teil bekannt sind, nämlich daß die Axialverzerrung dem Abstand der zugehörigen Faser von der neutralen Ebene proportional ist. Er nahm ferner einen Teil der auf den Balken wirkenden Kräfte als gegeben an und fand hierauf durch strenge Rechnung die übrigen Verschiebungen und Kräfte aus der Forderung, daß sie sowohl mit den Verzerrungsbeziehungen als auch mit den Gleichgewichts- und Randbedingungen verträglich sein sollen. Auf diesem Wege gelang es ihm, eine strenge und vollständige Lösung zu erhalten, die er dann mit bemerkenswertem Erfolg auf eine große Anzahl besonderer praktisch wichtiger Fälle angewendet hat.

Clebsch[2]) löste das Problem für einen Balken, der an einem Ende eingespannt, am andern dagegen in irgendeiner Weise unter Einschluß von Biegung, Torsion und Zug belastet ist. Er stützt sich im wesentlichen auf die gleichen Grundvoraussetzungen wie Saint-Vénant und erhält für die Verschiebungen und Spannungen eine allgemeine Lösung mit einer unbekannten Funktion, die er in vier Einzelfunktionen trennt, wodurch sich die Möglichkeit ergibt, jede der verschiedenen Beanspruchungsarten, nämlich Biegung, Torsion und Zug, einzeln für sich zu behandeln.

Die nachstehend entwickelte Lösung unterscheidet sich von der von de Saint-Vénant und Clebsch herrührenden dadurch, daß alle äußeren Kräfte ebenso wie deren Verteilung über die Endquerschnitte als gegeben und die Verschiebungen als völlig unbekannt eingeführt werden. Voraussetzungen wie die betreffend die Proportionalität zwischen der Formänderung und dem Abstand von der neutralen Fläche werden nicht gemacht. Vielmehr werden in dieser Arbeit die Spannungen unter Zugrundelegung des Satzes von der kleinsten Formänderungsarbeit mit Hilfe der Variationsrechnung direkt bestimmt, worauf dann auch die Verschiebungen berechnet werden können. Bei diesem Verfahren ist es nämlich unter Benutzung der Lagrangeschen Multiplikatorenmethode möglich, alle Bedingungsgleichungen zusammen mit dem Ausdruck für die Arbeit der inneren oder elastischen Deformationskräfte in einem Integral zu verkörpern, durch dessen Variation sich die unbekannten Spannungen eben ermitteln lassen. Die Lösung gilt für alle möglichen Belastungsfälle des freien Balkenendes und ist von der gleichen Allgemeinheit wie die von Clebsch erhaltene; auf dem Prinzip der kleinsten potentiellen Energie der elastischen Spannungen gegründet, gibt sie die Sicherheit dafür, daß der Spannungszustand, auf den sie führt, ein Zustand ist, dem sich der Balken nähern muß, wenn sie auch in der Praxis die Angriffspunkte der äußeren Kräfte in ihrer Umgebung nicht enthält. Mit anderen Worten, sie ergibt die ideelle oder natürliche Spannungsverteilung unter gewissen vereinfachenden Grundannahmen, die die gleichen sind wie die von de Saint-Vénant und Clebsch eingeführten.

Der allgemeine Ausdruck für die Spannungen enthält zwei unbekannte willkürliche Funktionen, die durch Integration zweier partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung bestimmt werden, wobei die Lösung am Querschnittsrande gewissen Bedingungen zu genügen hat. Zur Erläuterung wird das Verfahren am Schluß der vorliegenden Arbeit an mehreren Balken einfachen Querschnitts vorgeführt.

---

[1]) de Saint-Vénant, la Torsion des prismes, Acad. d. sciences, savants étr., vol. 14, 1856; la flexion des prismes, Journ. de mathém., par J. Liouville, 2. sér., vol. 1, 1856.

[2]) A. Clebsch, Theorie d. Elast. fest. Körp., 1862, von de St. Vénant übersetzt und vervollständigt: Théorie de l'élasticité des corps solides, 1883.

1. Voraussetzungen und Problemstellung. Wir betrachten einen durch zwei Endquerschnitte begrenzten zylindrischen oder prismatischen Balken von einfacher, wenn auch nicht notwendig symmetrischer Querschnittsform. Diese mag rund, dreieckig oder polygonal sein, jedoch nicht von der Art, daß entlegen liegende Querschnittsteile mit dem Hauptteil oder miteinander durch schmale Streifen verbunden erscheinen, wie dies beispielsweise beim I-Querschnitt der Fall ist. Das Material wird als isotrop vorausgesetzt[1]). Der Balken ist an einem Ende eingespannt, während am Endquerschnitt des freien Endes ein Kräftesystem angreift (Abb. 1). An den seitlichen Randflächen wirken keine äußeren Kräfte, die Wirkung der Schwere wird vernachlässigt. An keiner Stelle des Balkens wird die elastische Grenze des Materials überschritten. Ferner ist angenommen, daß die Balkenachse wagerecht verläuft, und das Ganze auf ein rechtwinkeliges Koordinatensystem bezogen, dessen Ursprung O_0 im Schwerpunkt des Einspannquerschnitts liegt; die Z Achse fällt mit der Balkenachse, die X- bzw. Y-Achse dagegen mit den Hauptträgheitsachsen des Querschnitts zusammen. Um die Vorstellung zu fixieren, nehmen wir $O_0 X$ als vertikal und zwar positiv nach unten, $O_0 Y$ als horizontal und positiv nach rechts gerichtet an, wenn man von außen her nach O_0 hinschaut. Die positiven Drehrichtungen sind in der Abbildung angegeben. Die Balkenlänge ist $l = O_0 A$. Handelt es sich um einen Querschnitt zwischen O_0 und A, so benutzen wir ein System, dessen Achsen in die gleichen Richtungen fallen, wie am Punkt O_0, dessen Ursprung aber in O, dem Querschnittsschwerpunkt, liegt. Das am freien Ende wirkende Kräftesystem ist von der allgemeinsten Art und kann daher in folgende Komponenten, nämlich Kräfte und Kräftepaare, aufgelöst werden: eine Axialkraft P, eine Vertikalkraft Q, eine Horizontalkraft S, sämtlich am Schwerpunkt des Endquerschnitts A angreifend, ein verdrehendes Kräftepaar T mit einer zu $O_0 A$ parallelen Drehachse, ein biegendes Moment M_{VA} in der vertikalen und ein biegendes Moment M_{HA} in der horizontalen Ebene. Die Kräftepaare erzeugen im Balken seiner ganzen Länge nach konstante Dreh- und Biegungsmomente, während die Kräfte Q und S Biegungsmomente hervorrufen, die vom Werte Null in A auf den Wert Ql bzw. Sl in O_0 anwachsen. Die Kräfte S und Q erzeugen ferner auch Querschubspannungen, die in jedem Querschnitt des Balkens von der gleichen Größe sind.

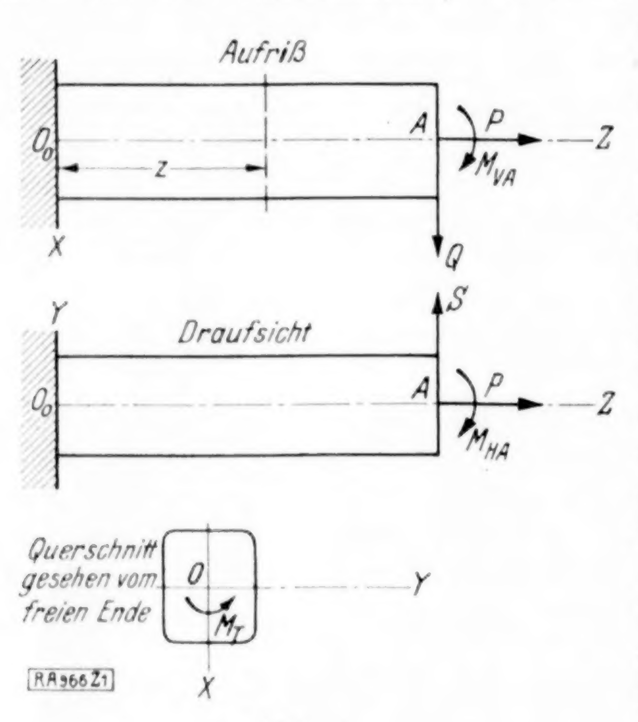


Abb. 1.

Es wird angenommen, daß die Verteilung der äußeren Kräfte über den Endquerschnitt A derartig ist, daß sie sich mit der noch unbekannten vom Prinzip der kleinsten Formänderungsarbeit verlangten Spannungsverteilung verträgt. Die gleiche Voraussetzung gilt für die Reaktions-Spannungsverteilungen im Endquerschnitt an der starr gedachten Einspannstelle. Damit sind sämtliche Kräfte bekannt bzw. ermittelt, und die Aufgabe besteht in der Bestimmung der Spannungen, die sämtlich unbekannt sind.

Wie in den von de Saint-Vénant und Clebsch gegebenen Lösungen wird ferner angenommen, daß sowohl normale als auch tangentiale Querspannungen in den zur Achse parallelen Ebenen vernachlässigt werden können. Dahingegen verschieben sich die Fasern der Länge nach relativ zueinander, wodurch entsprechende Schubspannungen erzeugt werden.

Zu betrachten sind also nur drei Spannungen: eine Normalspannung p in Richtung der Achse, eine vertikal gerichtete und in Ebenen senkrecht zur Z-Achse wirkende Scherspannung q in Verbindung mit der zugeordneten in den Horizontalebenen wirkenden längsgerichteten Spannung q, eine horizontal gerichtete und in Ebenen senkrecht zur Z-Achse wirkende Scherspannung s in Verbindung mit der zugeordneten in vertikalen Ebenen wirkenden längsgerichteten Spannung s.

[1]) Diese Annahme ist allerdings nicht unbedingt notwendig, wenigstens nicht im Falle reiner Biegung, wie in einer Arbeit des Verfassers gezeigt, s. Journ. of Math. and Phys., Mass. Inst. of Technol., Vol. II, Nr. 4, 1923.

Daher ist die Verzerrung in Richtung der Z-Achse gleich

$$e_{zz} = p/E,$$

worin E der Youngsche Elastizitätsmodul ist; die Komponenten der Schubverzerrung sind durch

$$e_{zx} = q/G \quad \text{bzw.} \quad e_{zy} = s/G$$

gegeben; ferner ist

$$e_{xx} = e_{yy} = -\sigma e_{zz} = -\sigma \frac{p}{E} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Hierin ist σ die Poissonsche Konstante und G der Schubmodul. Bekanntlich sind E und G durch die Gleichung

$$G = \frac{E}{2(1+\sigma)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

miteinander verknüpft.

2. Allgemeines Lösungsverfahren. Befindet sich der Balken unter der Einwirkung eines an seinem freien Ende angebrachten Randkräftesystems im Gleichgewicht, so wird, wenn ihm eine willkürliche kleine Deformation erteilt wird, die hierbei verrichtete Arbeit aller daran wirkenden äußeren und inneren Kräfte nach dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen gleich Null. Doch können wir uns in Uebereinstimmung mit dem bezeichneten Prinzip denken, daß die beiden Endquerschnitte unbeweglich bleiben, während der Balkenkörper zwischen ihnen eine kleine Deformation erleidet. In diesem Falle können nur die elastischen Kräfte Arbeit leisten, da die Seitenflächen des Balkens kräftefrei sind, während andererseits Massenkräfte vernachlässigt werden. Bezeichnet man mit W die Arbeit, die gegen die elastischen Spannungen geleistet werden muß, um den Balken in seine Gleichgewichtslage zu bringen, so ist die Arbeit, die bei der gedachten oder virtuellen Deformation geleistet wird, gleich δW, und im Gleichgewichtszustand muß dieser Betrag verschwinden:

$$\delta W = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Dies ist jedoch die Bedingung dafür, daß die Arbeit der elastischen Kräfte zu einem Minimum wird. Unser Problem ist somit auf die Aufgabe zurückgeführt, die Arbeit der elastischen Kräfte unter Berücksichtigung gewisser im nachstehenden näher erklärten Gleichgewichts- und Stetigkeitsbedingungen zu einem Minimum zu machen. Diese Aufgabe soll nun mit Hilfe der Variationsrechnung unter Benutzung der Lagrangeschen Multiplikatorenmethode gelöst werden.

Geht man von den Spannungen aus, so erhält man für die Arbeit der elastischen Kräfte folgenden einfachen Ausdruck:

$$W = \int_0^l \int_{y_2}^{y_1} \int_{x_2}^{x_1} \left\{ \frac{p^2}{2E} + \frac{q^2}{2G} + \frac{s^2}{2G} \right\} dx\,dy\,dz \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Hierin erstreckt sich die Integration über das ganze Volumen des Balkens zwischen den Endquerschnitten. In der Folge lassen wir, um die Schreibweise zu vereinfachen, die Integrationsgrenzen fort. In der z-Richtung sind diese $z = 0$ bzw. $z = l$, für die seitlichen Randflächen dagegen sind sie durch die Gestalt des Querschnittsrandes, der durch eine Beziehung zwischen x und y dargestellt ist, gegeben.

Die Spannungen p, q und s sind unbekannte Funktionen der Koordinaten x, y, z, und diese Funktionen sind so zu bestimmen, daß W unter verschiedenen Nebenbedingungen zu einem Minimum wird. Einige von diesen Nebenbedingungen haben die Gestalt von Differentialgleichungen und verlangen somit die Einführung neuer unbekannter Koeffizienten λ, die wie auch p, q und s Funktionen der unabhängigen Veränderlichen x, y, z sind; die anderen sind von isoperimetrischem Typus, indem sie für gewisse über p, q und s genommene Integrale konstante Werte vorschreiben, was wiederum die Einführung unbekannter konstanter Multiplikatoren verlangt.

Die Nebenbedingungsgleichungen ergeben sich auf Grund folgender Ueberlegungen:

1. Betrachten wir irgendwo im Innern der Balkenmasse ein Elementarprisma im Gleichgewichtszustande und beachten dabei, daß unseren Voraussetzungen gemäß direkte Querspannungen sowie eine von den Scherspannungen gleich Null sind, so lauten die Grundgleichungen des Gleichgewichtes folgenderweise:

$$\frac{\partial q}{\partial z} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial s}{\partial z} = 0 \quad . \quad . \quad (5), \qquad \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

Aus (5) folgt, daß q und s im wesentlichen von z unabhängig sind, so daß die Scherspannungen für ein gewisses Wertepaar x, y längs des ganzen Balkens die gleichen sind. Mit anderen Worten, bei jeder Scheibe, die wir durch zwei benachbarte Querschnitte abgrenzen können, sind die Scherspannungen sowohl der Größe, als auch der Verteilung nach die gleichen.

2. Um der Stetigkeitsforderung des Materialzusammenhanges zu genügen, ist es notwendig, gewisse identische Beziehungen zwischen den Komponenten der Formänderungen zu erfüllen. Diese sind durch die sogenannten Kompatibilitätsgleichungen ausgedrückt, die gewöhnlich zwar in den Verzerrungsgrößen gegeben werden, im vorliegenden Falle jedoch einfacher mit den Spannungsgrößen angeschrieben werden können:

$$\frac{1}{G}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial s}{\partial x}-\frac{\partial q}{\partial y}\right)+2\frac{\sigma}{E}\frac{\partial^2 p}{\partial z\,\partial x}=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7),$$

$$\frac{1}{G}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial s}{\partial x}-\frac{\partial q}{\partial y}\right)-2\frac{\sigma}{E}\frac{\partial^2 p}{\partial z\,\partial y}=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8).$$

Die Gl. (6), (7) und (8) sind nicht alle voneinander unabhängig; durch Elimination der Ableitungen von p lassen sie sich vereinfachen.

Differenziert man (6) nach x bzw. nach y und substituiert dann die für $\frac{\partial^2 p}{\partial z\,\partial x}$ und $\frac{\partial^2 p}{\partial z\,\partial y}$ erhaltenen Werte in (7) und (8), so hat man

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial^2 q}{\partial y^2}-\frac{2\,\sigma G}{E}\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}-\frac{2\,\sigma G}{E}\frac{\partial^2 s}{\partial x\,\partial y}=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9),$$

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 q}{\partial x\,\partial y}+\frac{2\,\sigma G}{E}\frac{\partial^2 q}{\partial x\,\partial y}+\frac{2\,\sigma G}{E}\frac{\partial^2 s}{\partial y^2}=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

anstatt der Gl. (6), (7) und (8).

3. In jedem beliebigen Querschnitt müssen die Spannungen derartig sein, daß ihre Resultierende den Kräften und Kräftepaaren, die in diesem Querschnitt durch die äußeren Kräfte und Kräftepaare P, Q, S, T, M_{VA}, M_{VH} hervorgerufen werden, das Gleichgewicht halten. Daher muß in jedem beliebigen Querschnitt gelten:

$$\iint p\,dx\,dy=P \quad . \quad . \quad . \quad (11), \qquad \iint q\,dx\,dy=Q \quad . \quad . \quad . \quad (12),$$

$$\iint s\,dx\,dy=S \quad . \quad . \quad . \quad (13), \qquad \iint (s\,x-q\,y)\,dx\,dy=T \quad (14),$$

$$-\iint px\,dx\,dy=M_V=M_{VA}+Q\,(l-z) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15),$$

$$\iint py\,dx\,dy=M_H=M_{HA}-S\,(l-z) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16).$$

In allen diesen Gleichungen erstreckt sich die Integration über die ganze Querschnittsfläche.

4. An der Mantelfläche muß die Summe der Spannungskomponenten senkrecht zur Oberfläche gleich Null sein, da auf diese Fläche keine äußeren Kräfte wirken. Die Gleichung der Randkurve des Balkenquerschnitts sei $y=\varphi\,(x)$, so daß

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d\varphi}{dx} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17\,\mathrm{a}).$$

Da nun p parallel zur Balkenachse wirkt, so sind nur die Scherspannungen q und s zu berücksichtigen, deren Resultierende also tangential zur Randkurve gerichtet sein muß:

$$\frac{s}{q}=\frac{dy}{dx}=\frac{d\varphi}{dx} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17\,\mathrm{b})$$

in allen Punkten der Randkurve.

3. Die Variation. Das zu variierende Integral U ergibt sich, indem dem Integranden von W in (4) die mit λ_1 bzw. λ_2 multiplizierten linken Seiten der Differentialgleichungen (9) und (10) addiert werden. Die Koeffizienten λ_1 und λ_2 sind gleichfalls Funktionen der unabhängigen Veränderlichen.

Die Gl. (11) bis (16) enthalten sämtlich Doppelintegrale, erstreckt über einen Balkenquerschnitt durch irgendeinen Punkt z der Achse; jedes dieser Integrale enthält eine oder zwei unbekannte Spannungen und ist gleich einer konstanten Größe. Diese Integrale wollen wir in dreifache Integrale umwandeln, indem wir sie nach z zwischen den Grenzen O und l integrieren. Dadurch ist deren Charakter jedoch in keiner Weise geändert, da die so gebildeten Integrale einzeln doch je einer konstanten Größe gleich sind.

Beispielsweise ergibt die Gl. (11)

$$\iiint p\,dx\,dy\,dz = P\,l \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11'),$$

während die Gl. (16) in

$$\iiint p\,y\,dx\,dy\,dz = M_{HA}\,l - {}^1/_2\,S\,l^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16')$$

übergeht. Da jetzt die Integrale in (11') bis (16') von der gleichen Art und zwischen den gleichen Grenzen genommen sind wie W, so können wir sie nach Multiplikation je mit einer der Konstanten a, b, c, e, f, g dem Integral W addieren. Dadurch ergibt sich das zu variierende Integral zu

$$\begin{aligned} U = \iiint \Big\{ & \frac{p^2}{2\,E} + \frac{q^2}{2\,G} + \frac{s^2}{2\,G} + ap + bq + cs + e\,(sx - qy) + fpx + qpy \\ & + \lambda_1 \left[\frac{\partial^2 s}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} - \frac{2\,\sigma\,G}{E}\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} - \frac{2\,\sigma\,G}{E}\frac{\partial^2 s}{\partial x \partial y}\right] \\ & + \lambda_2 \left[\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 q}{\partial x \partial y} + \frac{2\,\sigma\,G}{E}\frac{\partial^2 q}{\partial x \partial y} + \frac{2\,\sigma\,G}{E}\frac{\partial^2 s}{\partial y^2}\right]\Big\}\, dx\,dy\,dz \quad . \quad (18). \end{aligned}$$

Soll nun U zu einem Minimum werden, so muß die erste Variation von U verschwinden, wenn p, q und s voneinander unabhängig und willkürlich um unendlich kleine Beträge variiert werden. Nach geeigneten Umformungen läßt sich die Variation δU in zwei Teile zerlegen; der eine ist ein dreifaches Integral, das nur die gänzlich willkürlichen ersten Variationen von p, q und s enthält, der andere besteht aus einer Anzahl bestimmter Doppelintegrale, insgesamt mit Ω bezeichnet und Variationen und Ableitungen der Variationen von p, q und s enthaltend, doch nur für solche Werte der unabhängigen Veränderlichen, die den Randbedingungen entsprechen. Wir finden so

$$\begin{aligned} \delta\,U = \Omega + \iiint \Big\{ & \left[\frac{p}{E} + a + fx + gy\right]\delta p \\ & + \left[\frac{q}{G} + b - ey - \frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial y^2} - \frac{2\,\sigma\,G}{E}\frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial x \partial y} + \frac{2\,\sigma\,G}{E} - \frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial x \partial y}\right]\delta q \\ & + \left[\frac{s}{G} + c + ex + \frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial x \partial y} - \frac{2\,\sigma\,G}{E}\frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial x^2} + \frac{2\,\sigma\,G}{E}\frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial y^2}\right]\delta s\Big\}\, dx\,dy\,dz = 0 \quad (19). \end{aligned}$$

Verlangt man nun, daß U zu einem Minimum wird, so muß Ω und das dreifache Integral jedes für sich verschwinden; da aber $\delta\,p$, $\delta\,q$ und $\delta\,s$ ganz willkürlich und voneinander unabhängig sind, so kann das dreifache Integral nur dann verschwinden, wenn die Faktoren der drei Variationen einzeln gleich Null sind.

Betrachten wir zuerst den Faktor von $\delta\,p$.

4. Bestimmung der Längsspannung. Setzen wir den Faktor von $\delta\,p$ gleich Null, so erhalten wir eine einfache endliche Gleichung zur Bestimmung der Längsspannung:

$$p = -E\,(f\,x + g\,y + a) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20).$$

Die Gleichung enthält drei unbekannte Konstanten f, g und a; diese sind durch die die Größe p enthaltenden Nebenbedingungsgleichungen bestimmt. Durch Substitution in (11) erhalten wir

$$P = -E\iint (f\,x + g\,y + a)\,dx\,dy = -E\,(f\,m_y + g\,m_x + a\,F),$$

worin m_x und m_y die Trägheitsmomente der Querschnittsfläche in bezug auf die X- bzw. Y-Achse durch den Schwerpunkt bedeuten und F der Flächeninhalt des Querschnitts ist.

Da aber OX und OY laut Voraussetzung Hauptachsen sind, so sind m_x und m_y gleich Null und wir erhalten

$$a = -\frac{P}{F\,E} = -\frac{p_0}{E} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21),$$

worin p_0 die mittlere Längsspannung im Balken infolge der Längskraft P ist. Wie ersichtlich, ist $a = 0$, wenn $P = 0$. Es bleibt die Größen f und g zu ermitteln.

Substituiert man die Werte von p aus der Gl. (20) in (15) und (16), so folgt

$$E\iint (f\,x^2 + g\,y\,x + a\,x)\,dx\,dy = E\,I_y\,f = M_{VA} + Q\,(l - z)$$

$$-E\iint (f\,x\,y + g\,y^2 + a\,y)\,dx\,dy = -E\,I_x\,g = M_{HA} - S\,(l - z).$$

Hierin sind I_x und I_y die Trägheitsmomente der Querschnittsfläche hinsichtlich der X- bzw. Y-Achse. Beachtet man, daß die die ungeraden Potenzen von x und y enthaltenden Integrale verschwinden, so findet man

$$f = \frac{M_{VA} + Q(l-z)}{E I_y} \quad \text{und} \quad g = -\frac{M_{HA} - S(l-z)}{E I_x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22).$$

Danach verschwindet f, wenn sowohl M_{VA}, als auch Q gleich Null sind, und ebenso verschwindet g, wenn sowohl M_{HA}, als auch S gleich Null sind. Mit anderen Worten, wenn in der Vertikalebene kein Moment wirkt, so verschwindet f, und wenn in der Horizontalebene kein Moment wirkt, so verschwindet g.

Substituiert man die Werte der Konstanten in die Gl. (20), so ergibt sich

$$p = -\frac{[M_{VA} + Q(l-z)]\,x}{I_y} + \frac{[M_{HA} - S(l-z)]\,y}{I_x} + p_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23).$$

Das erste Glied der rechten Seite entspricht der üblichen Formel für die Biegung in der Vertikalebene. Es ist von der Form

$$p = \frac{M}{I}\,x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24),$$

worin M das Biegungsmoment ist, hier gegeben durch das konstante Biegungsmoment infolge des am Rande wirkenden Kräftepaares M_{VA} und das veränderliche Biegungsmoment infolge der vertikalen Randlast Q. Das zweite Glied der rechten Seite von (23) entspricht dem Fall, daß die Biegung in der horizontalen Ebene erfolgt.

Wie man sieht, ist die Formel, die sich aus dem Prinzip der kleinsten Formänderungsarbeit ohne irgendwelche Voraussetzungen über die Deformation bzw. die Nichtdeformation der Querschnitte ergeben hat, mit der üblichen Biegungsformel identisch. Sie ist daher mit dem erwähnten Prinzip nicht nur im Falle konstanter Biegung nach einem Kreise vereinbar, sondern auch im Falle veränderlicher Biegung, wie im vorliegenden Falle, bei dem das Biegungsmoment von Punkt zu Punkt sich ändert und die Querschnitte bekanntlich ihren ursprünglichen Ebenen gegenüber verbogen werden.

5. Bestimmung der Scherspannungen. Jetzt müßten wir eigentlich die Faktoren von δq und δs in (19) gleich Null setzen, doch können wir uns die Arbeit bedeutend erleichtern, indem wir zunächst auf die Gl. (18) zurückgehen und die Faktoren von λ_1 und λ_2 in dieser Gleichung umformen.

Differentiation von (23) nach z ergibt

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{Q x}{I_y} + \frac{S y}{I_x},$$

somit ist also nach (6)

$$\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial s}{\partial y} = -\frac{Q x}{I_y} - \frac{S y}{I_x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25).$$

Differentiation der Größe $\frac{\partial p}{\partial z}$ nach x und y ergibt

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial z} = \frac{Q}{I_y} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial^2 p}{\partial y \partial z} = \frac{S}{I_x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26).$$

Damit erhalten die Kompatibilitätsbeziehungen (7) und (8) die Gestalt

$$\frac{1}{G}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial s}{\partial x} - \frac{\partial q}{\partial y}\right) = -\frac{2\sigma}{E}\frac{Q}{I_y} \qquad \frac{1}{G}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial s}{\partial x} - \frac{\partial q}{\partial y}\right) = \frac{2\sigma}{E}\frac{S}{I_x}.$$

Integration dieser Gleichungen liefert

$$\frac{\partial s}{\partial x} - \frac{\partial q}{\partial y} = 2\tau G + \frac{2\sigma G}{E}\left(\frac{S x}{I_x} - \frac{Q y}{I_y}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27),$$

worin τ eine Integrationskonstante ist.

Die linken Seiten der Nebenbedingungsgleichungen (25) und (27) können nun unter das Integralzeichen von U an Stelle der komplizierteren Ausdrücke der Nebenbedingungsgleichungen (9) und (10) genommen werden und wir erhalten

$$U = \iiint \left\{ \frac{p^2}{2E} + \frac{q^2}{2G} + \frac{s^2}{2G} + ap + bq + cs + e(sx - qy) + fpx - gpy \right.$$
$$\left. + \lambda_1\left(\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial s}{\partial y}\right) + \lambda_2\left(\frac{\partial s}{\partial x} - \frac{\partial q}{\partial y}\right)\right\} dx\,dy\,dz \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

und dies ergibt bei der Variation

$$\delta U = \Omega + \iiint \left\{ \left[\frac{p}{E} + a + f x + g y \right] \delta p + \left[\frac{q}{G} + b - c y - \frac{\partial \lambda_1}{\partial x} + \frac{\partial \lambda_2}{\partial y} \right] \delta q \right.$$
$$\left. + \left[\frac{s}{G} + c + e x - \frac{\partial \lambda_1}{\partial y} - \frac{\partial \lambda_2}{\partial x} \right] \delta s \right\} d x \, d y \, d z \quad . \quad . \quad . \quad (29).$$

Der Faktor von δp ist bereits oben behandelt worden; setzt man die Faktoren von δq und δs gleich Null, so findet man durch Auflösung

$$\left. \begin{aligned} q = G \left[\frac{\partial \lambda_1}{\partial x} - \frac{\partial \lambda_2}{\partial y} + e y - b \right], \qquad s = G \left[\frac{\partial \lambda_1}{\partial y} + \frac{\partial \lambda_2}{\partial x} - e x - c \right] \end{aligned} \right\} \quad . \quad (30),$$

woraus folgt

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial x} &= G \left[\frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial x \partial y} \right]; & \frac{\partial s}{\partial x} &= G \left[\frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial x^2} - e \right] \\ \frac{\partial q}{\partial y} &= G \left[\frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial y^2} + e \right]; & \frac{\partial s}{\partial y} &= G \left[\frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^3 \lambda_2}{\partial x \partial y} \right] \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad (31).$$

Substituiert man dies in (25) und (27), so erhält man

$$\frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial y^2} = - \frac{1}{G} \left(\frac{Q x}{I_y} + \frac{S y}{I_x} \right) = - \frac{2 (1 + \sigma)}{E} \left(\frac{Q x}{I_y} + \frac{S y}{I_x} \right) \quad . \quad . \quad . \quad (32),$$

$$\frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial y^2} = 2 (\tau + e) + \frac{2 \sigma}{E} \left(\frac{S x}{I_x} - \frac{Q y}{I_y} \right) \quad . \quad . \quad . \quad (33).$$

Da die Grenzen fest sind und $\frac{d z}{d x} = 0$, $\frac{d z}{d y} = 0$, so verschwinden die mit Ω bezeichneten Terme an den Grenzen.

Die zwei partiellen linearen Differentialgleichungen (32) und (33) liefern die Funktionen λ_1 und λ_2, doch enthält die Lösung unbestimmte Konstanten, die aus den Randbedingungen zu ermitteln sind. Somit hängt die Lösung in letzter Linie von der Gestalt der Querschnittsrandlinie ab; sie kann für eine Anzahl von Querschnittsformen einfacher Art vollständig und genau angegeben werden.

Die Gl. (32) und (33) unterscheiden sich der Gestalt nach erheblich von denjenigen, zu denen de Saint-Vénant und Clebsch gelangt sind, sie führen jedoch zu den gleichen Resultaten.

Wir geben nun zunächst eine Lösung an, die sich aus ganzen rationalen algebraischen Funktionen von x und y zusammensetzt und die Randbedingungen für verschiedene einfache Querschnitte mit einer oder zwei Symmetrieachsen erfüllt. Wie aus den weiter folgenden Ausdrücken für die Spannungen q und s hervorgeht, führt in den betrachteten Fällen folgende Lösung der Gl. (28) und (29) zum Ziele:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= B (y^3 - 3 y x^2) + C (x^3 - 3 x y^2) - \left(\frac{S x}{I_x} + \frac{Q y}{I_y} \right) \frac{x y}{2 G} \\ \lambda_2 &= (\tau + e) x^2 + \frac{\sigma}{3 E} \left(\frac{S x^3}{I_x} - \frac{Q y^3}{I_y} \right) \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (34),$$

worin B, C und τ Konstanten sind. Die Ausdrücke enthalten weder konstante Glieder, noch solche von der ersten Potenz in x und y, da λ_1 und λ_3 in den Ausdrücken (30) für q und s nur in den ersten Ableitungen vorkommen. Glieder von höherer als dritter Potenz in x und y könnten hinzugefügt werden, doch hatte es sich gezeigt, daß die Ausdrücke (34) in den nachstehend erörterten einfachen Fällen hinreichend sind. Daß diese Ausdrücke die Differentialgleichungen (32) und (33) befriedigen, ist leicht einzusehen.

Durch Differentiation von λ_1 und λ_2 nebst Substitution in (30) ergeben sich die Scherspannungen zu

$$q = G \left[3 C (x^2 - y^2) - \left(6 B + \frac{S}{G I_x} \right) x y - \frac{Q y^2}{E I_y} + e y - b \right] \quad . \quad . \quad . \quad (35),$$

$$s = - G \left[3 B (x^2 - y^2) + \left(6 C + \frac{Q}{G I_y} \right) x y + \frac{S x^2}{E I_x} - (2 \tau + e) x + c \right] \quad . \quad (36).$$

Diese Ausdrücke sind der Gestalt nach einander ähnlich, wie es auch sein muß; denn, ist nur eine von den Randlasten, etwa Q, angebracht, so muß der Ausdruck für q dem für s ähnlich sein, wenn S allein angreift. Die drei Konstanten b, c, e können aus (12), (13) und (14), die drei Integrationskonstanten aus den Randbedingungen bestimmt werden. Es ist zu bemerken, daß τ bei der Integration der Kompatibilitätsgleichungen eingeführt wurde und im Ausdruck für die Ableitungen von λ_2 sowie im Ausdruck für s,

doch nicht in dem für q wiedererscheint. Wie wir nun gleich sehen werden, ist die mit dem Torsionsmoment T zusammenhängende Konstante e eine Funktion von τ, so daß τ in den Ausdrücken für q und s wesentlich mitspielt.

Immer, wenn $T=0$ ist, ist $e=0$ und, wie aus (49) unten ersichtlich ist, ist auch $\tau=0$ bei symmetrischen Querschnitten. Bei unsymmetrischen Querschnitten verschwindet τ auch dann nicht, wenn äußere Drehmomente nicht vorhanden sind. Obwohl dieser Koeffizient mit der Torsion zusammenhängt, ist er direkt durch die Kompatibilitätsforderungen bedingt.

Wir haben angenommen, daß die Kräfte am freien Ende und die Reaktionen am eingespannten Ende über die Endquerschnitte so verteilt sind, wie dies die nachstehend ausgeführte aus dem Prinzip der kleinsten Formänderungsarbeit folgende Spannungsverteilung verlangt. In der Praxis ist dies niemals erfüllt, da aber den Spannungen die Tendenz innewohnt, jener Bedingung zu entsprechen, so sind wir zur Annahme berechtigt, daß in einem gewissen Abstand von den Enden die Spannungen sich ihr unterordnen werden. Saint-Vénant hat gezeigt, daß sich diese Anpassung bis dicht an die Stabenden erstreckt (Prinzip von de Saint-Vénant).

Somit ist gezeigt, daß es mit Hilfe des Prinzips der kleinsten Formänderungsarbeit möglich ist, die Spannungen zu bestimmen, wenn die am Balken wirkenden äußeren Kräfte bekannt sind; hierbei werden keinerlei Voraussetzungen über die Verschiebungen gemacht, wie dies bei der Saint-Vénantschen Methode der Fall ist. Sind die Spannungen ermittelt, so können die Verzerrungen mittels der Gl. (1) und hierauf die Verschiebungen gefunden werden, wie in Loves »Theorie der Elastizität« angegeben [1]). Hierbei dienen die Einspannbedingungen am Ursprung zur Bestimmung der Integrationskonstanten.

Nicht selten begeht man dadurch einen Fehler, daß man annimmt, die gewöhnliche Biegungsformel stehe und falle unter allen Umständen mit der Voraussetzung, daß die ebenen Balkenquerschnitte auch nach der Biegung eben und senkrecht zu den Längsfasern bleiben; diese Voraussetzung ist nur bei der reinen Biegung, bei der der Balken nach einem Kreise gebogen ist, erfüllt; doch ist, wie de Saint-Vénant [2]) gezeigt hat und in der vorliegenden Arbeit zum Ausdruck gebracht ist, die gewöhnliche Biegungsformel auch bei veränderlicher Biegung streng giltig, wenn nur die Scherkraft konstant ist, wie bei einem eingespannten Balken, der am freien Ende durch eine Querkraft beansprucht ist. In diesem Falle bleiben die Querschnitte nicht eben, sondern sie krümmen und neigen sich um einen konstanten Betrag gegen die Fasern, so daß die Proportionalität der Längsspannungen, ausgedrückt durch die übliche Formel, streng erfüllt ist [3]).

In den folgenden Beispielen besteht die äußere Belastung entweder in einer senkrechten Endlast oder in einem Drehmoment. Im ersten Falle ergeben sich Längsspannungen, die sich einfach mittels der Formel (23) ausdrücken lassen. Mit Bezug auf Abb. 1 ist das Biegungsmoment im Abstand z vom eingespannten Ende gegeben durch

$$M = Q(l-z) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37).$$

Dementsprechend ist die Längsspannung

$$p = -\frac{Q(l-z)}{I_y}x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38).$$

Diese Spannung wird uns in der Folge nicht beschäftigen. Nachstehend geben wir einige Anwendungen der obigen Formeln.

6. Balken von elliptischem Querschnitt unter senkrechter Randlast. Die am Endquerschnitt eines zylindrischen Balkens von elliptischem Querschnitt wirkenden Kräfte mögen als alleinige Resultierende eine Vertikalkraft Q im Schwerpunkt dieses Querschnitts ergeben. Die Querkraft S ist gleich Null. Die Scherspannungen folgen aus (35) und (36).

Da OX eine Symmetrieachse ist, so müssen die mit q bezeichneten Spannungen bei einem gegebenen Wert von x für entgegengesetzt gleiche y-Werte einander gleich sein. Daher kann y im Ausdruck für q nicht in der ersten Potenz vorkommen, folglich

---

[1]) Love, Theory of Elasticity, 3. Aufl., S. 338.

[2]) L'Académie des Sciences, Bd. 14, 1856, S. 187.

[3]) Saint-Vénant bemerkt bei der Anwendung seiner zum Teil umgekehrten Methode: »... die Prismenquerschnitte krümmen und neigen sich gegen die Fasern alle gleich, da die zwischen ihnen enthaltenen Faserteile die gleichen Dilatationen erleiden, wie wenn diese Teile zwischen normal bleibenden Ebenen eingeschlossen wären« (a. a. O. S. 95).

ist $e = 0$, und da $S = 0$, so ist auch $B = 0$ und $c = 0$. Da ferner keine Torsion auftritt und der Querschnitt in bezug auf die beiden Hauptachsen symmetrisch ist, so ist auch $\tau = 0$.

Die Querschnittsrandlinie sei durch die Gleichung

$$\frac{x_1^2}{m^2} + \frac{y_1^2}{n^2} = 1 \quad \ldots \ldots \quad (39)$$

gegeben, worin der Index 1 auf die Zugehörigkeit zur Randlinie hinweisen soll. Aus (35) und (36) erhalten wir

$$q = G\left[3\,C\,(x^2 - y^2) - \frac{Q\,y^2}{E\,I_y} - b\right] \quad \ldots \ldots \quad (35'),$$

$$s = -\,G\left[6\,C + \frac{Q}{G\,I_y}\right]x\,y \quad \ldots \ldots \quad (36').$$

Nach (12) ist $\quad Q = \int\int q\,dx\,dy = G\left[3\,C\,(I_y - I_x) - \frac{Q\,I_x}{E\,I_y} - b\,F\right],$

worin $F = \pi\,m\,n$ den Flächeninhalt des Balkenquerschnitts bezeichnet.

Führt man $\frac{Q}{F} = q_0$ als mittlere Scherspannung ein, so wird

$$b = -\frac{q_0}{G} + 3\,C\,\frac{I_y - I_x}{F} - \frac{q_0\,I_x}{E\,I_y} \quad \ldots \ldots \quad (40).$$

Diese Gleichung enthält zwei unbekannte Größen b und C; eine weitere Gleichung folgt aus der Randbedingung. Nach (17b) nämlich gilt für den Rand:

$$\frac{s}{q} = \left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)_1 = -\frac{x_1\,n^2}{y_1\,m^2}, \qquad q\,x_1\,n^2 + s\,y_1\,m^2 = 0 \quad \ldots \quad (41).$$

Unter Benutzung von (35') und (36') finden wir nach Division durch x_1 und mit Rücksicht auf $x_1^2 = m^2\left(1 - \frac{y_1^2}{n^2}\right)$

$$3\,C\,m^2\,n^2 - b\,n^2 = \left(9\,C\,m^2 + 3\,C\,n^2 + \frac{Q\,n^2}{E\,I_y} + \frac{Q\,m^2}{G\,I_y}\right)y_1^2 \quad \ldots \quad (42).$$

Diese Gleichung muß in allen Punkten der Randlinie erfüllt sein, und zwar ist hierzu erforderlich, daß der Faktor von y_1^2 und die konstante linke Seite beide einzeln verschwinden. Aus (42) und (40) folgt demnach

$$b = 3\,C\,m^2 = -\frac{q_0}{G} + 3\,C\,\frac{I_y - I_x}{F} - \frac{q_0\,I_x}{E\,I_y}.$$

Da $I_y = \frac{F\,m^2}{4}$ und $I_x = \frac{F\,n^2}{4}$, so finden wir

$$C = -\frac{4\,q_0}{3\,m^2\,E\,G}\,\frac{(m^2\,E + n^2\,G)}{(3\,m^2 + n^2)} \quad \ldots \ldots \quad (43).$$

Setzt man aber den Faktor von y_1^2 in (42) gleich Null, so muß sich hieraus für C der gleiche Wert ergeben. Damit folgt, daß

$$b = -\frac{4\,q_0\,(m^2\,E + n^2\,G)}{E\,G\,(3\,m^2 + n^2)},$$

$$q = \frac{4\,q_0}{m^2\,(3\,m^2 + n^2)\,E}\left[(m^2\,E + n^2\,G)\,(m^2 - x^2) - m^2\,(3\,G - E)\,y^2\right] \quad \ldots \quad (44),$$

$$s = \frac{4\,q_0}{m^2}\left[\frac{2\,(m^2\,E + n^2\,G)}{(3\,m^2 + n^2)\,E} - 1\right]x\,y \quad \ldots \ldots \quad (45).$$

Für einen kreiszylindrischen Balken vom Radius a gehen diese Formeln über in

$$q = \frac{q_0}{a^2\,E}\left[(E + G)\,(a^2 - x^2) - (3\,G - E)\,y^2\right] \quad \ldots \ldots \quad (44'),$$

$$s = -\frac{2\,q_0\,(E - G)}{a^2\,E}\,x\,y \quad \ldots \ldots \quad (45').$$

7. Balken von ellipsenähnlichem Querschnitt unter senkrechter Randlast.

Wir betrachten einen Balken, dessen Querschnittsrandlinie durch die Gleichung

$$\frac{x_1^2}{m^2} + \frac{y_1^4}{n^4} = 1 \quad \ldots \ldots \quad (46)$$

gegeben ist. Diese stellt eine ellipsenähnliche dem Rechteck sich nähernde Kurve dar. Abb. 2 zeigt eine solche für den Fall $m = 2\,n$. Das Verfahren ist das gleiche wie unter **6.** Es ist hier wiederum $B = 0$, $e = 0$, $c = 0$, $\tau = 0$, und wir finden

$$q = \frac{2\,Q}{5\,I_y}\,(m^2 - x^2), \qquad s = -\frac{Q}{5\,I_y}\,x\,y \quad \ldots \ldots \quad (47).$$

Es ist eine bemerkenswerte Tatsache, daß in diesem Falle die vertikale Scherspannung q von y unabhängig ist und für einen gegebenen Abstand von der neutralen Achse konstanten Wert hat, wie bei der gewöhnlichen im Falle der Biegungsbeanspruchung gebrauchten Formel. Auch sind die Spannungen vom Trägheitsmoment hinsichtlich der Achse OX unabhängig.

Für den Fall $m = 2n$ ergibt sich der numerische Wert des Verhältnisses $(s_{max} : q_{max})$ der Maximalspannungen zu

$$\frac{s_{max}}{q_{max}} = \frac{5}{32}.$$

Hiernach beträgt die Querschubspannung der Größe nach etwa ein Sechstel der Vertikalschubspannung. Für den Fall $n = 2m$, was einem flachen schwachen Balken entspricht, ergibt sich

$$\frac{s_{max}}{q_{max}} = \frac{5}{8}.$$

Dies bedeutet, daß im zuletzt betrachteten Falle und überhaupt bei flach geformten Balken eine Vernachlässigung der Querschubspannungen nicht zulässig ist, wenn die Biegungsebene auf der größeren Achse senkrecht steht.

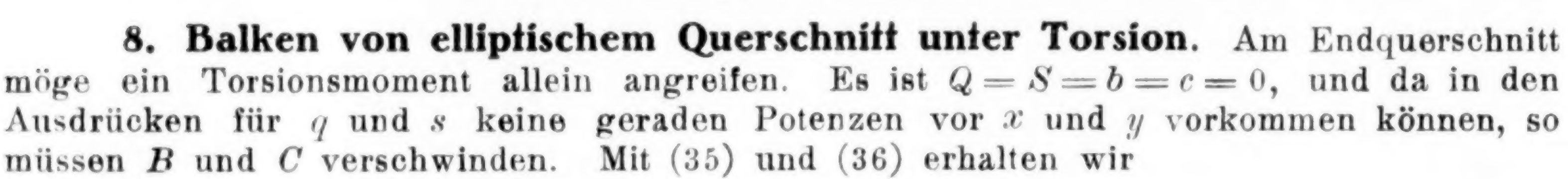


Abb. 2.

8. Balken von elliptischem Querschnitt unter Torsion. Am Endquerschnitt möge ein Torsionsmoment allein angreifen. Es ist $Q = S = b = c = 0$, und da in den Ausdrücken für q und s keine geraden Potenzen vor x und y vorkommen können, so müssen B und C verschwinden. Mit (35) und (36) erhalten wir

$$q = G\,e\,y, \qquad s = G\,(2\,\tau + e)\,x \qquad (48),$$

$$T = \iint (s\,x - q\,y)\,dx\,dy = G\,[(2\,\tau + e)\,I_y - e\,I_x] \qquad (49),$$

$$e = \frac{4\,T - 2\,F\,G\,m^2\,\tau}{F\,G\,(m^2 - n^2)} \qquad (50).$$

Die Randbedingung (41) ergibt

$$e\,n^2\,y_1\,x_1 + (2\,\tau + e)\,m^2\,x_1\,y_1 = 0,$$

$$e = -\frac{2\,\tau\,m^2}{m^2 + n^2} \qquad (51).$$

Aus (50) und (51) folgt

$$\tau = \frac{m^2 + n^2}{m^2\,n^2\,F\,G}\,T \qquad (52),$$

$$e = -\frac{2\,T}{n^2\,F\,G} \qquad (53).$$

Die Konstante τ ist der Torsionswinkel pro Längeneinheit. Durch Substitution in (48) ergibt sich

$$q = -\frac{2\,T}{n^2\,F}\,y = -2\,\tau\,G\,\frac{m^2}{m^2 + n^2}\,y, \qquad s = \frac{2\,T}{m^2\,F}\,x = 2\,\tau\,G\,\frac{n^2}{m^2 + n^2}\,x \qquad (54).$$

Für ein elliptisches Rohr, dessen Querschnitt durch zwei ähnliche Ellipsen mit den Halbachsen m und n bzw. km und kn begrenzt ist, wobei $k < 1$ ist, finden wir, indem wir in gleicher Weise verfahren, wie beim vollen Querschnitt,

$$\tau = \frac{(m^2 + n^2)\,T}{m^2\,n^2\,(1 - k^4)\,F\,G} \qquad (52'),$$

$$q = -\frac{2\,T}{n^2\,(1 - k^4)\,F}\,y, \qquad s = \frac{2\,T}{m^2\,(1 - k^4)\,F}\,x \qquad (54'),$$

worin F den Flächeninhalt des vollen Querschnitts bedeutet.

Im Falle eines vollen kreisförmigen Querschnitts ist

$$\tau = -e = \frac{T}{I_0\,G}; \qquad q = -\frac{T}{I_0}\,y; \qquad s = \frac{T}{I_0}\,x \qquad (54''),$$

worin I_0 das polare Trägheitsmoment des Querschnitts ist.

9. Balken mit gleichseitigem Dreieck als Querschnitt unter reiner Torsion. Die Seitenlänge des Querschnittsdreiecks möge mit a, die Höhe mit h bezeichnet werden, so daß

$$\frac{a}{h} = \frac{2}{\sqrt{3}},$$

ferner möge der Koordinatenursprung mit dem Schwerpunkt des Dreiecks zusammenfallen und OX senkrecht zur horizontalen Grundlinie verlaufen, wie in Abb. 3 gezeigt. Unter Benutzung des Index 1 für die Randpunkte erhalten wir folgende Gleichungen für die Dreiecksseiten:

$$\left.\begin{array}{lll} y_1 = \frac{a}{3} + \frac{a\,x_1}{2\,h}, & -y_1 = \frac{a}{3} + \frac{a\,x_1}{2\,h}, & x_1 = \frac{h}{3} \\ \left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)_1 = \frac{a}{2\,h}, & \left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)_1 = -\frac{a}{2\,h}, & \left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)_1 = \infty \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (55).$$

In (35) und (36) haben wir wiederum, wie unter 8, $Q = S = b = c = 0$ zu setzen. Infolge der Symmetrie in bezug auf die Achse OX muß q bei einem gegebenen x-Wert und für entgegengesetzt gleiche y-Werte gleichfalls entgegengesetzt gleiche Werte haben, während bei s in diesem Falle auch das Zeichen ungeändert erhalten bleibt. Hieraus folgt, daß das Glied mit $x\,y$ in (35) bestehen bleiben muß, während das Glied mit $x^2 - y^2$ zu streichen ist, und umgekehrt in (36), d. h. wir haben $C = 0$ zu setzen. Die Gleichungen für q und s gehen so mit über in

$$q = -G\,(6\,B\,x\,y - e\,y) \quad . \quad . \quad (35'),$$

$$s = -G\,[3\,B\,(x^2 - y^2) - (2\,\tau + e)\,x] \quad (36').$$

Abb. 3.

Die Randbedingungen ergeben für die gegen die Horizontale geneigten Seiten

$$\frac{s}{q} = \left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)_1 = \pm\frac{a}{2\,h},$$

$$3\,B\,(x_1{}^2 - y_1{}^2) - (2\,\tau + e)\,x_1 = \pm\frac{3\,a}{h}\,B\,x_1\,y_1 \mp \frac{a\,e}{2\,h}\,y_1.$$

Nun ist aber nach (55)

$$y_1 = \pm\left(\frac{a}{3} + \frac{a\,x_1}{2\,h}\right),$$

so daß wir erhalten

$$3\,B\,x_1{}^2 - 3\,B\left(\frac{a^2}{9} + \frac{a^2\,x_1{}^2}{4\,h^2} + \frac{a^2\,x_1}{3\,h}\right) - (2\,\tau + e)\,x_1 = \frac{3\,a\,B}{h}\left(\frac{a\,x_1}{3} + \frac{a\,x_1{}^2}{2\,h}\right) - \frac{a\,e}{2\,h}\left(\frac{a}{3} + \frac{a\,x_1}{2\,h}\right).$$

Dies muß für alle Werte von x_1 auf jeder der beiden geneigten Dreiecksseiten gelten, folglich müssen sowohl die konstanten Glieder als auch die in x_1 und $x_1{}^2$ einzeln verschwinden. Auf diese Weise erhalten wir aus den konstanten Gliedern und denjenigen in x_1

$$B = \frac{e}{2\,h}, \qquad e = -\tau, \qquad B = -\frac{\tau}{2\,h},$$

$$q = \frac{G\,\tau}{h}\,(3\,x\,y - h\,y), \qquad s = \frac{G\,\tau}{2\,h}\,[3\,(x^2 - y^2) + 2\,h\,x] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (56),$$

wodurch die Randbedingungen auf den geneigten Seiten befriedigt sind. Die Glieder mit $x_1{}^2$ führen zu einer Identität.

Für die Grundlinie des Dreiecks ist $x_1 = h/3$, also $q = 0$, wie dies auch sein sollte, während $s = \frac{G\,\tau}{2\,h}\,(h^2 - 3\,y^2)$.

Substituiert man die Werte von q und s in (14), so findet man

$$T = \int\!\!\int (s\,x - q\,y)\,d\,x\,d\,y = \frac{G\,\tau\,a\,h^3}{30} \quad \text{oder} \quad \tau = \frac{80\,T}{a^4\,G\,\sqrt{3}}.$$

Hieraus ergibt sich, wenn man die Spannungen durch das Torsionsmoment ausdrückt:

$$q = \frac{160\,T}{3\,a^5}\,(3\,x\,y - h\,y), \qquad s = \frac{80\,T}{3\,a^5}\,[3\,(x^2 - y^2) + 2\,h\,x] \quad . \quad . \quad . \quad (57).$$

Die größte Spannung ergibt sich für die Mitten der Dreiecksseiten und berechnet sich am schnellsten für die Grundlinie:

$$s_{max} = \frac{20\,T}{a^3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (58).$$

10. Balken von rechteckigem Querschnitt unter vertikaler Endlast. Wie in den vorhergehenden Fällen lassen sich die Längsspannungen ohne Schwierigkeit aus (23) bestimmen, dagegen können hier die Schubspannungen nicht mit Hilfe von durch einfache ganze algebraische Funktionen von x und y ausgedrückten unbekannten Koeffizienten λ_1 und λ_2 ermittelt werden. Bei der Integration der Differentialgleichungen (32) und (33) ist es vielmehr notwendig, zu transzendenten Funktionen Zuflucht zu nehmen.

Da $S = 0$ und $r + e = 0$, so gehen die Gl. (32) und (33) über in

$$\frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial y^2} = -\frac{2(1+\sigma) Q x}{E I} \quad (32'), \qquad \frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial y^2} = -\frac{2 \sigma Q y}{E I} \quad . \quad (33')$$

worin I für das frühere I_y gesetzt ist. Da $e = c = 0$, so gehen die Gl. (30) über in

$$q = G\left(\frac{\partial \lambda_1}{\partial x} - \frac{\partial \lambda_2}{\partial y} - \bar{b}\right), \qquad s = G\left(\frac{\partial \lambda_1}{\partial y} + \frac{\partial \lambda_2}{\partial x}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30').$$

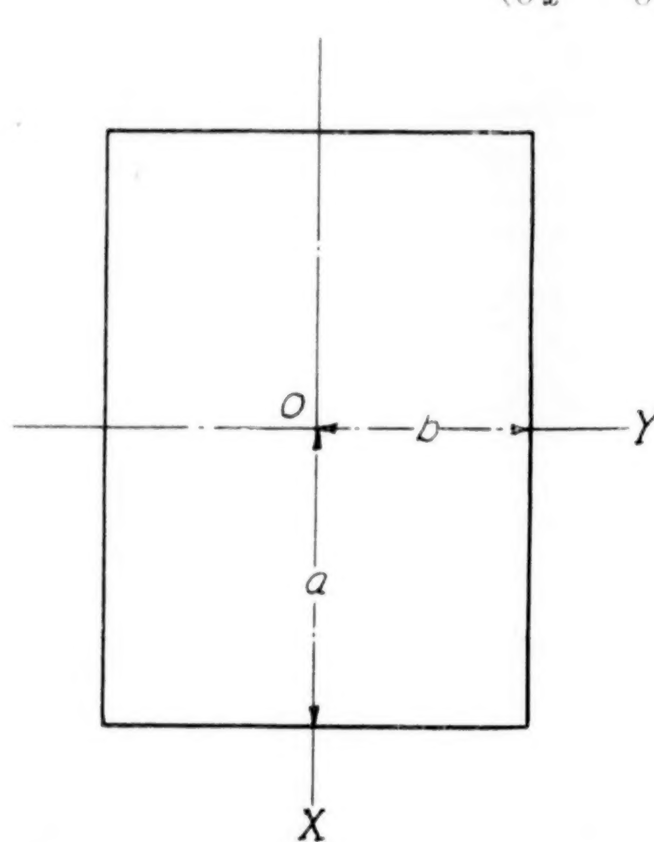


Abb. 4.

Wir orientieren das Koordinatensystem nach Abb. 4. Die Seiten des Querschnittsrechtecks bezeichnen wir mit 2a und 2b[1].

Zuerst suchen wir die Integrale der den Gl. (32') und (33') entsprechenden homogenen Differentialgleichungen. Die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial y^2} = 0$$

ist befriedigt durch den Ansatz

$$\lambda_1 = \Sigma e^{\alpha x} (A_\alpha \cos \alpha y + A_\alpha' \sin \alpha y),$$

worin A_α, A_α' und α noch zu bestimmende Koeffizienten sind und die Summation sich über eine unendliche Reihe erstreckt.

Entsprechenderweise lautet die Lösung der der Gl. (33') zugehörigen homogenen Differentialgleichung

$$\lambda_2 = \Sigma e^{\gamma x} (B_\gamma \cos \gamma y + B_\gamma' \sin \gamma y).$$

Die partikulären Integrale lassen sich in üblicher Weise angeben; addiert man diese den oben gefundenen Lösungen, so ergeben sich die vollständigen Integrale zu

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 &= \Sigma e^{\alpha x} (A_\alpha \cos \alpha y + A_\alpha' \sin \alpha y) - \frac{(1+\sigma) Q x^3}{3 E I} \\ \lambda_2 &= \Sigma e^{\gamma x} (B_\gamma \cos \gamma y + B_\gamma' \sin \gamma y) - \frac{\sigma Q y^3}{3 E I} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (59).$$

Um die unbestimmten Konstanten zu ermitteln, machen wir von den Symmetrie- und Randbedingungen Gebrauch:

1. Erste Symmetriebedingung. Wegen der Symmetrie in bezug auf die Achse OX muß die vertikale Scherspannung q ungeändert bleiben, wenn man den Punkt x, y mit dem Punkt $x, -y$ vertauscht, daher

$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial x} = \Sigma\, \alpha\, e^{\alpha x} (A_\alpha \cos \alpha y + A_\alpha' \sin \alpha y) - \frac{(1+\sigma) Q x^2}{E I}$$

und

$$\frac{\partial \lambda_2}{\partial y} = \Sigma\, \gamma\, e^{\gamma x} (- B_\gamma \sin \gamma y + B_\gamma' \cos \gamma y) - \frac{\sigma Q y^2}{E I}$$

Aus der ersten Gl. (30') folgt, daß die Sinusglieder in diesen Ausdrücken verschwinden und daß also die Größen A_α' und B_γ gleich Null sein müssen. Wir können also schreiben, indem wir den Strich bei der Größe B' unterdrücken,

$$\lambda_1 = \Sigma e^{\alpha x} A_\alpha \cos \alpha y - \frac{(1+\sigma) Q x^3}{3 E I}, \qquad \lambda_2 = \Sigma e^{\gamma x} B_\gamma \sin \gamma y - \frac{\sigma Q y^3}{3 E I} \quad . \quad (60).$$

[1]) Die Konstante in der ersten Gl. (30') ist mit $\bar{b}$ bezeichnet, um einer Verwechselung mit b, womit die halbe Vertikalseite des Rechtecks bezeichnet sein soll, vorzubeugen.

2. Zweite Symmetriebedingung. Die Symmetrie in bezug auf die Achse OY verlangt, daß für Punkte mit einem gegebenen Wert von y und entgegengesetzt gleichen Werten von x die vertikale Schubspannung q gleiche Werte haben muß. Dies folgt aus der Tatsache, daß die Längsspannungen in bezug auf die Achse OY symmetrisch verteilt sind, wie oben festgestellt.

Nach (30') und (60) ist

$$q = G\left\{\begin{matrix}\Sigma\,\alpha\,e^{\alpha x} A_\alpha \cos\alpha y - \Sigma\,\gamma\,e^{\gamma x} B_\gamma \cos\gamma y + \text{Glieder mit} \\ \text{geraden Potenzen von } x \text{ und } y + \text{konstantes Glied}\end{matrix}\right\}$$

Die Bedingung, daß q für entgegengesetzt gleiche Werte von x gleiche Werte haben soll, kann erfüllt werden, indem man in den obigen Ausdruck für $e^{\alpha x}$ die Größe $e^{\alpha x} + e^{-\alpha x}$ und für $e^{\gamma x}$ die Größe $e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}$ substituiert. Dies ist mit der Annahme gleichbedeutend, daß sich die durch Σ gekennzeichnete Reihe sowohl in positiver wie in negativer Richtung erstreckt und daß A_α und B_γ die gleichen absoluten Werte haben wie $A_{-\alpha}$ bzw. $B_{-\gamma}$, jedoch von entgegengesetztem Vorzeichen sind: $A_{-\alpha} = -A_\alpha$ und $B_{-\gamma} = -B_\gamma$. Mit diesen Bemerkungen gehen die Ausdrücke für λ_1 und λ_2 über in

$$\left.\begin{aligned}\lambda_1 &= \Sigma\,(e^{\alpha x} - e^{-\alpha x})\,A_\alpha \cos\alpha y - \frac{(1+\sigma)\,Q\,x^3}{3\,E\,I} \\ \lambda_2 &= \Sigma\,(e^{\gamma x} + e^{-\gamma x})\,B_\gamma \sin\gamma y - \frac{\sigma\,Q\,y^3}{3\,E\,I}\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (61).$$

3. Erste Randbedingung. Da am Rande keine dazu normalen Spannungen auftreten können, so ist zu schließen, daß die quer gerichteten Schubspannungen in jedem beliebigen Punkte des vertikalen Randes gleich Null sein müssen. Somit ist $s = 0$ für $y = \pm b$ bei allen Werten von x zwischen $x = +a$ und $x = -a$.

Nach (30') und (61) ist demnach

$$G\,\{-\Sigma\,\alpha\,(e^{\alpha x} - e^{-\alpha x})\,A_\alpha \sin\alpha b + \Sigma\,\gamma\,(e^{\gamma x} - e^{-\gamma x})\,B_\gamma \sin\gamma b\} = 0 \quad . \quad (62).$$

Diese Gleichung kann aber nur dann für alle Werte von x gelten, wenn $\sin\alpha b = 0$ und $\sin\gamma b = 0$, d. h. wenn

$$\alpha = \gamma = \frac{n\,\pi}{b} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (63)$$

worin n eine ganze Zahl zwischen 0 und ∞ bedeutet. Wir dürfen uns hier auf positive n-Werte beschränken, da sich die Glieder mit entgegengesetzt gleichen n-Werten durch einfache Addition ihrer Koeffizienten zusammenfassen lassen. Der Wert $n = 0$ ergibt einen speziellen Term in λ_1, der besser außerhalb des Σ-Zeichens zu setzen ist; bei λ_2 ist dieser Term gleich Null.

Entwickelt man hier für sehr kleine Werte von α, der von de Saint-Vénant benutzten Methode folgend, die Exponentialgrößen in λ_1, so kann man schreiben

$$(e^{\alpha x} - e^{-\alpha x})\,A_\alpha = 2\,\alpha\,x\,A_\alpha$$

und diese Größe ist endlich, wenn A_α unendlich ist in gleichem Maße, wie α verschwindet. Bezeichnet man dieses Glied mit $K\,x$, so schreibt sich (61) wie folgt:

$$\lambda_1 = K\,x + \sum_1^\infty \left(e^{\frac{n\pi x}{b}} - e^{-\frac{n\pi x}{b}}\right) A_n \cos\frac{n\,\pi\,y}{b} - \frac{(1+\sigma)\,Q\,x^3}{3\,E\,I}$$

$$\lambda_2 = \sum_1^\infty \left(e^{\frac{n\pi x}{b}} + e^{-\frac{n\pi x}{b}}\right) B_n \sin\frac{n\,\pi\,y}{b} - \frac{\sigma\,Q\,y^3}{3\,E\,I},$$

worin sich die Grenzen an den Summationszeichen auf die Werte von n beziehen. Durch Differentiation finden wir

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\lambda_1}{\partial x} &= K + \sum_1^\infty \frac{n\,\pi}{b}\left(e^{\frac{n\pi x}{b}} + e^{-\frac{n\pi x}{b}}\right) A_n \cos\frac{n\,\pi\,y}{b} - \frac{(1+\sigma)\,Q\,x^2}{E\,I} \\ \frac{\partial\lambda_1}{\partial y} &= -\sum_1^\infty \frac{n\,\pi}{b}\left(e^{\frac{n\pi x}{b}} - e^{-\frac{n\pi x}{b}}\right) A_n \sin\frac{n\,\pi\,y}{b} \\ \frac{\partial\lambda_2}{\partial x} &= \sum_1^\infty \frac{n\,\pi}{b}\left(e^{\frac{n\pi x}{b}} - e^{-\frac{n\pi x}{b}}\right) B_n \sin\frac{n\,\pi\,y}{b} \\ \frac{\partial\lambda_2}{\partial y} &= \sum_1^\infty \frac{n\,\pi}{b}\left(e^{\frac{n\pi x}{b}} + e^{-\frac{n\pi x}{b}}\right) B_n \cos\frac{n\,\pi\,y}{b} - \frac{\sigma\,Q\,y^2}{E\,I}\end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (65.$$

4. **Zweite Randbedingung.** Da die vertikalen Schubspannungen an den horizontalen Rändern verschwinden müssen, so muß $q = 0$ sein für $x = \pm a$ bei allen Werten von y zwischen $+b$ und $-b$. Aus (30') und (65) folgt damit

$$O = \frac{\partial \lambda_1}{\partial x} - \frac{\partial \lambda_2}{\partial y} - \bar{b} = K + \sum_1^\infty \frac{n\pi}{b}\left(e^{\frac{n\pi a}{b}} + e^{-\frac{n\pi a}{b}}\right) A_n \cos\frac{n\pi y}{b}$$

$$- \frac{(1+\sigma) Q a^2}{E I} - \sum_1^\infty \frac{n\pi}{b}\left(e^{\frac{n\pi a}{b}} + e^{-\frac{n\pi a}{b}}\right) B_n \cos\frac{n\pi y}{b} + \frac{\sigma Q y^2}{E I} - \bar{b} \quad . \quad (66).$$

Da wir jedoch y nur zwischen den Grenzen $+b$ und $-b$ betrachten, dürfen wir y^2 in eine Fouriersche Reihe nach den cosinus der n-fachen von $\frac{\pi y}{b}$ zerlegen, was die Entwickelung

$$y^2 = \frac{b^2}{3} - \frac{4 b^2}{\pi^2} \sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \cos\frac{n\pi y}{b}$$

ergibt. Substituiert man dies in (66), so erhält man

$$K - \bar{b} - \frac{(1+\sigma) Q a^2}{E I} + \frac{\sigma Q b^2}{3 E I} = \frac{4 b^2}{\pi^2} \frac{\sigma Q}{E I} \sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \cos\frac{n\pi y}{b}$$

$$- \sum_1^\infty \frac{n\pi}{b}\left(e^{\frac{n\pi a}{b}} + e^{-\frac{n\pi a}{b}}\right)(A_n - B_n) \cos\frac{n\pi y}{b}$$

Dieser Ausdruck enthält eine Gruppe von konstanten Gliedern und eine andere Gruppe von Gliedern, die mit den cosinus der n-fachen von $\frac{\pi y}{b}$ behaftet sind. Da die Gleichung für alle Werte von y zwischen $+b$ und $-b$ gelten muß, so muß jede dieser zwei Gruppen von Gliedern für sich verschwinden:

$$K - \bar{b} = \frac{(1+\sigma) Q a^2}{E I} - \frac{\sigma Q b^2}{3 E I}, \qquad A_n - B_n = \frac{4 b^3}{\pi^3} \frac{\sigma Q}{E I} \frac{(-1)^{n-1}}{n^4} \frac{1}{e^{\frac{n\pi a}{b}} + e^{-\frac{n\pi a}{b}}} \quad (67).$$

Substituiert man nun (65) und (67) in den Ausdruck für q nach (30'), so folgt

$$q = G\left(\frac{\partial \lambda_1}{\partial x} - \frac{\partial \lambda_2}{\partial y} - \bar{b}\right) = G\left\{K + \sum_1^\infty \frac{n\pi}{b}\left(e^{\frac{n\pi x}{b}} + e^{-\frac{n\pi x}{b}}\right)(A_n - B_n)\cos\frac{n\pi y}{b}\right.$$

$$\left. - \frac{(1+\sigma) Q x^2}{E I} + \frac{\sigma Q y^2}{E I} - K + \frac{(1+\sigma) Q a^2}{E I} - \frac{\sigma Q b^2}{3 E I}\right\}$$

Zur Vereinfachung führen wir $I = {}^1/_3\, F a^2$, $Q/F = q_0$ = mittlere Schubspannung im Querschnitt, $G = \frac{E}{2(1+\sigma)}$, und den Wert von $A_n - B_n$ nach (67) ein. Substituiert man ferner noch die hyperbolischen Funktionen für die Exponentialgrößen, so erhält man

$$q = \frac{3 q_0}{2(1+\sigma) a^2}\left\{(1+\sigma)(a^2 - x^2) - \sigma\left(\frac{b^2}{3} - y^2\right) + \frac{4 \sigma b^2}{\pi^2} \sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \frac{\cosh\frac{n\pi x}{b}}{\cosh\frac{n\pi a}{b}} \cos\frac{n\pi y}{b}\right\} \quad (68).$$

In ähnlicher Weise finden wir für die quergerichtete Scherspannung

$$s = G\left(\frac{\partial \lambda_1}{\partial y} + \frac{\partial \lambda_2}{\partial x}\right) = -\frac{E}{2(1+\sigma)} \sum_1^\infty \frac{n\pi}{b}\left(e^{\frac{n\pi x}{b}} - e^{-\frac{n\pi x}{b}}\right)(A_n - B_n) \sin\frac{n\pi y}{b}.$$

Substituiert man hierin den Wert von $A_n - B_n$, so ergibt sich

$$s = -\frac{3 q_0}{2(1+\sigma) a^2}\left\{\frac{4 \sigma b^2}{\pi^2} \sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \frac{\sinh\frac{n\pi x}{b}}{\cosh\frac{n\pi a}{b}} \sin\frac{n\pi y}{b}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (69).$$

Wie wir gesehen haben genügen diese Ausdrücke den vier oben angegebenen Bedingungen. Die hier angewandte Methode ist der von de Saint-Vénant befolgten notwendiger Weise ähnlich, indem die willkürlichen Konstanten auf Grund der gleichen Bedingungen bestimmt werden; während jedoch de Saint-Vénant diese Bedingungen auf seine Ausdrücke für die Verschiebungen anwendet, aus denen die Spannungen nachträglich ermittelt werden, sind sie hier direkt auf die Spannungen angewandt.

11. Balken von rechteckigem Querschnitt unter Torsion. Wir haben hier nur die Scherspannungen q und s zu betrachten. Da Q und S gleich Null sind, so reduziert sich die Gl. (32) auf die Laplacesche Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial y^2} = 0 \quad \text{(32')},$$

während (33) übergeht in

$$\frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial y^2} = 2(\tau + e) \quad \text{(33')}.$$

Da aber jede Lösung von (32') in der allgemeinen Lösung von (33') enthalten sein muß, dürfen wir die erstere fortlassen, damit auch die Indizes in der zweiten, die dann die Gestalt

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial y^2} = 2(\tau + e) \quad \text{(70)}$$

annimmt. Wir verfahren wie im 10. Abschnitt und erhalten die Lösung

$$\lambda = \Sigma e^{\alpha x}(A_\alpha \cos \alpha y + A_\alpha' \sin \alpha y)$$

zu der noch das partikuläre Integral

$$\tfrac{1}{2}(\tau + e)(x^2 + y^2)$$

hinzutritt.

Aus den Gl. (30) erhalten wir durch Fortlassung der Glieder mit λ_1, b und c

$$q = -G\left(\frac{\partial \lambda}{\partial y} + e\, y\right), \qquad s = G\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} - e\, x\right) \quad \text{(71)}.$$

1. Erste Symmetriebedingung. Für gleiche x- und entgegengesetzt gleiche y-Werte muß auch q entgegengesetzt gleiche Werte annehmen. Wir haben nun

$$\frac{\partial \lambda}{\partial y} = \Sigma\, \alpha\, e^{\alpha x}(-A_\alpha \sin \alpha y + A_\alpha' \cos \alpha y) + (\tau + e)\, y$$

und es folgt, daß A_α' gleich Null sein muß:

$$\lambda = \Sigma e^{\alpha x} A_\alpha \cos \alpha y + \tfrac{1}{2}(\tau + e)(x^2 + y^2) \quad \text{(72)}.$$

2. Zweite Symmetriebedingung. Für gleiche y- und entgegengesetzt gleiche x-Werte muß auch s entgegengesetzt gleiche Werte haben. Da

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x} = \Sigma\, \alpha\, e^{\alpha x} A_\alpha \cos \alpha y + (\tau + e)\, x,$$

so kann diese Forderung erfüllt werden, wenn wir $e^{\alpha x} - e^{-\alpha x}$ an Stelle von $e^{\alpha x}$ im Ausdruck für $\frac{\partial \lambda}{\partial x}$ schreiben, woraus folgt

$$\lambda = \Sigma A_\alpha (e^{\alpha x} + e^{-\alpha x}) \cos \alpha y + \tfrac{1}{2}(\tau + e)(x^2 + y^2) \quad \text{(73)}.$$

3. Erste Randbedingung. Für $y = \pm b$ muß $s = 0$ sein, daher nach (71) und (73)

$$0 = \Sigma A_\alpha\, \alpha\, (e^{\alpha x} - e^{-\alpha x}) \cos \alpha b + \tau\, x.$$

Dies muß für alle Werte von x zwischen $+a$ und $-a$ gelten, daher muß identisch

$$\tau = 0 \quad \text{und} \quad \alpha = \frac{(2n-1)\pi}{2b} \quad \text{(74)}$$

sein, worin n eine positive ganze Zahl zwischen 1 und ∞ ist:

$$\lambda = \sum_1^\infty A_\alpha \left(e^{\frac{(2n-1)\pi x}{2b}} + e^{-\frac{(2n-1)\pi x}{2b}}\right) \cos \frac{(2n-1)\pi y}{2b} + \tfrac{1}{2} e (x^2 + y^2) \quad \text{(75)}.$$

4. Zweite Randbedingung. Für $x = \pm a$ muß $q = 0$ sein, daher

$$0 = -\sum_1^\infty \frac{(2n-1)\pi}{2b} A_\alpha \left(e^{\frac{(2n-1)\pi a}{2b}} + e^{-\frac{(2n-1)\pi a}{2b}}\right) \sin \frac{(2n-1)\pi y}{2b} + 2\, e\, y.$$

Nun setzen wir

$$\frac{(2n-1)\pi}{2b} \frac{A_\alpha}{2e} \left(e^{\frac{(2n-1)\pi a}{2b}} + e^{-\frac{(2n-1)\pi a}{2b}}\right) = A_n \quad \text{(76)}$$

womit

$$y = \sum_1^\infty A_n \sin \frac{(2n-1)\pi y}{2b}$$

wird für alle Werte von y zwischen den Grenzen $+b$ und $-b$.

Hierin lassen sich die Koeffizienten A_n als bestimmte Integrale darstellen:

$$A_n = \frac{2}{b} \int_0^b y \sin \frac{(2n-1)\pi y}{2b} \, dy = \frac{8b(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2 \pi^2} .$$

Substituiert man dies in (76), so ergibt sich der entsprechende Ausdruck für A_n, und damit geht (75) unter Einführung hyperbolischer Funktionen über in

$$\lambda = {}^1/_2 \left(\frac{4}{\pi}\right)^3 e\, b^2 \sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3} \frac{\cos h \frac{(2n-1)\pi x}{2b}}{\cos h \frac{(2n-1)\pi a}{2b}} \cos \frac{(2n-1)\pi y}{2b} + {}^1/_2\, e\,(x^2+y^2) \qquad (77).$$

Durch Differentiation von λ nach y und nach x und Substitution in (71) finden wir die Spannungen

$$q = -2eGy + eGb\left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2} \frac{\cos h \frac{(2n-1)\pi x}{2b}}{\cos h \frac{(2n-1)\pi a}{2b}} \sin \frac{(2n-1)\pi y}{2b} \quad . \quad (78)$$

$$s = eGb\left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2} \frac{\sin h \frac{(2n-1)\pi x}{2b}}{\cos h \frac{(2n-1)\pi a}{2b}} \cos \frac{(2n-1)\pi y}{2b} \quad . \; . \; . \quad (79).$$

Es bleibt noch die Konstante e zu bestimmen. Nach der Gl. (14) ist

$$T = \iint (s x - q y)\, dx\, dy .$$

Substituiert man hierin (78) und (79), so ergibt sich

$$T = G e a b^3 \left\{ \frac{16}{3} - \left(\frac{4}{\pi}\right)^5 \frac{b}{a} \sum_1^\infty \frac{1}{(2n-1)^5}\, t g h \frac{(2n-1)\pi a}{2b} \right\} \quad . \; . \; . \quad (80).$$

Aus dieser Gleichung erhalten wir die Konstante e, die den Verdrehungswinkel pro Längeneinheit des Balkens darstellt.

Bei der Lösung von (70) hätten wir das Integral auch in der Form

$$\lambda = \Sigma\, e^{\alpha y} [A_\alpha \cos \alpha x + A_\alpha' \sin \alpha x]$$

ansetzen können, also mit einfacher Vertauschung von x und y gegenüber dem oben gewählten Ansatz; hierbei hätten wir für q und s Ausdrücke erhalten, die sich von denen nach (79) und (78) nur durch Vertauschung von x und a mit y bzw. b unterscheiden, und umgekehrt. 966

Die Reibungsdämpfung bei mechanischen Schwingungsmessern.

Von **OTTO HOLM** in Hamburg.

1. Praktische Notwendigkeit einer Dämpfung. Die für die Aufzeichnung von Erschütterungen von Bauwerken, Schwingungen von Brücken, Schiffskörpern etc. gebräuchlichen mechanischen Schwingungsmesser liefern bisher noch sehr unterschiedliche Ergebnisse. Der gleiche Schwingungsvorgang wird von zwei verschiedenartigen Meßinstrumenten unter Umständen mit erheblichen Anzeigedifferenzen registriert, so daß die aufgezeichneten Diagramme nicht ohne weiteres erkennen lassen, daß sie denselben Schwingungsvorgang wiedergeben sollen.

In der Hauptsache sind diese Unterschiede auf die den Instrumenten eigenen verschieden großen Dämpfungen zurückzuführen, da sie auch bei Schwingungsmessern gleicher Eigenfrequenz auftreten. Ueber den Nutzen einer künstlichen Dämpfung bei Schwingungsmeßgeräten sind schon anderweitig Untersuchungen veröffentlicht worden, so daß ich mich hier auf diese beziehen kann[1]. Es zeigt sich, daß eine der üblichen Annahme entsprechende Dämpfung, die Proportionalität zwischen Dämpfungskraft und Geschwindigkeit voraussetzt, ungünstig wirkt. Die Dämpfungskraft sucht in den in Frage kommenden Frequenzbereichen die träge Masse, die möglichst in Ruhe verharren soll, mitzunehmen. Es ist nämlich naturgemäß nicht möglich, eine von der Absolutgeschwindigkeit der schwingenden Masse abhängende Dämpfung zu erzeugen, sondern nur eine solche, die von der Relativgeschwindigkeit zwischen der trägen Masse und der sich bewegenden Unterlage abhängt.

[1] Vergl. Werft-Reederei-Hafen, 9. Jahrg. Heft 9 vom 7. Mai. »Ueber den Nutzen einer künstlichen Dämpfung bei Schwingungsmeßgeräten« von Dr. S. Geiger.

Wenn man so auf Grund der Ueberlegungen von Dr. Geiger zu dem Schluß kommt, daß die künstliche Erhöhung der Dämpfung verkehrt und schädlich sei, sind andererseits völlig dämpfungsfreie Apparate praktisch auch nicht brauchbar, da einmal erzeugte Schwingungen nicht abklingen und Resonanzen zwischen den Vielfachen der Eigenfrequenz des Instrumentes und der Frequenz des registrierten Schwingungsvorganges unvermeidlich sind. Die schwingende Masse eines dämpfungfreien Instrumentes oder eines solchen mit zu geringer Dämpfung schlägt deshalb dauernd sehr heftig gegen die Begrenzungsanschläge und macht dadurch die Aufnahme brauchbarer Diagramme unmöglich.

Die in der Praxis gebräuchlichen Schwingungsmesser sind dementsprechend auch mit einer verhältnismäßig starken Dämpfung behaftet. Im allgemeinen ist sie auf unvermeidbare Reibungskräfte in den Gelenken und zwischen Schreibstift und Trommel zurückzuführen. Die Dämpfungskraft hängt deshalb auch nicht von der Geschwindigkeit bzw. Relativgeschwindigkeit der trägen Masse ab, sondern nur von der relativen Bewegungsrichtung und wird der Grösse nach einigermaßen konstant sein.

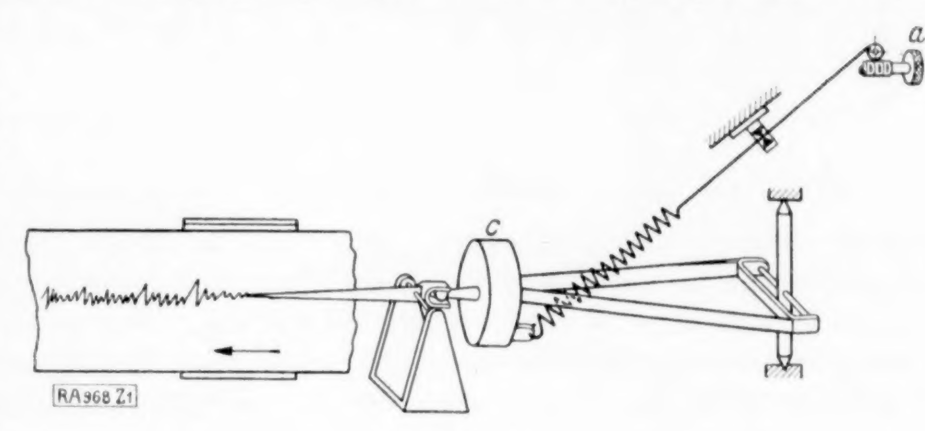


Abb. 1.

Untersuchungen mit dem Schwingungsmesser von Maihak A. G. Hamburg (Abb. 1), bestätigen die Vermutung, daß

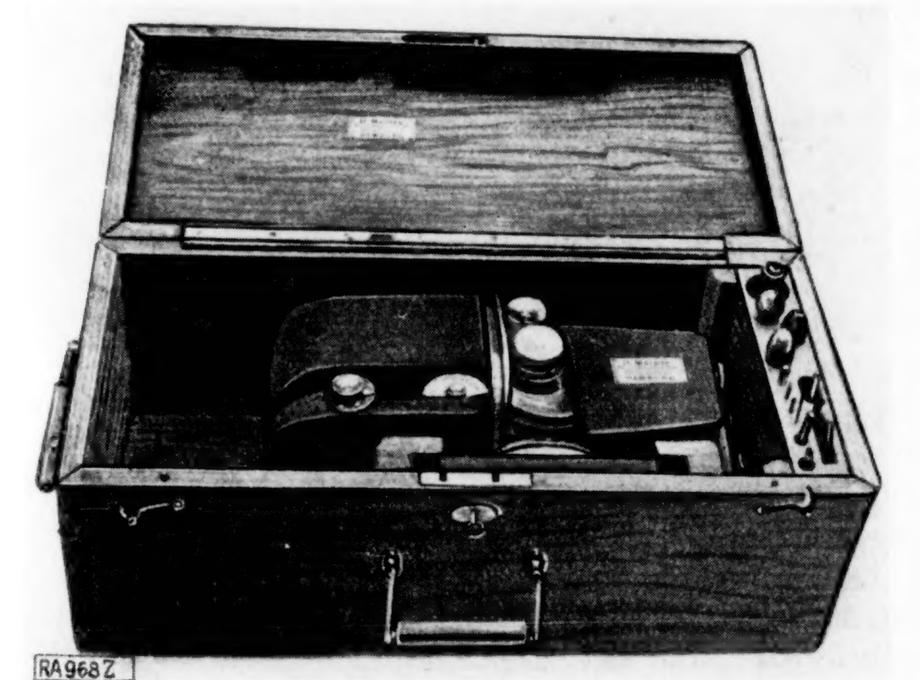


Abb. 1a

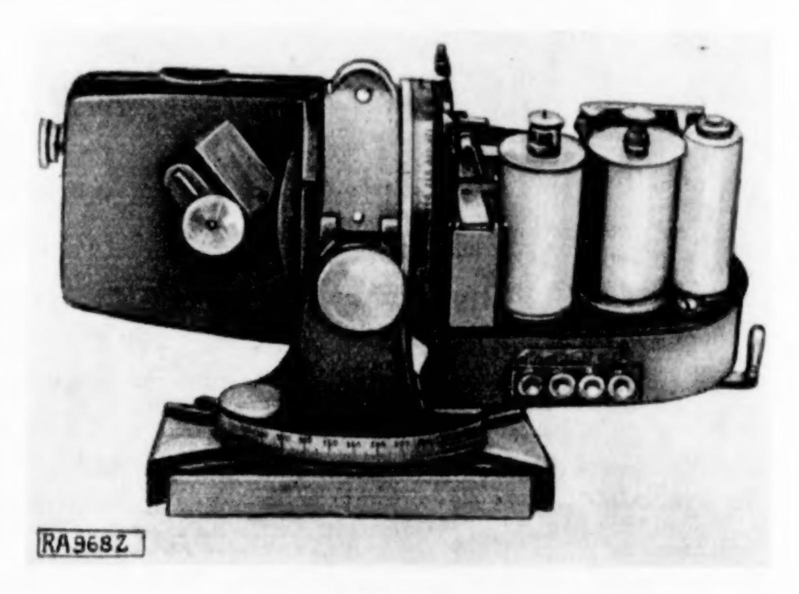


Abb. 1b.

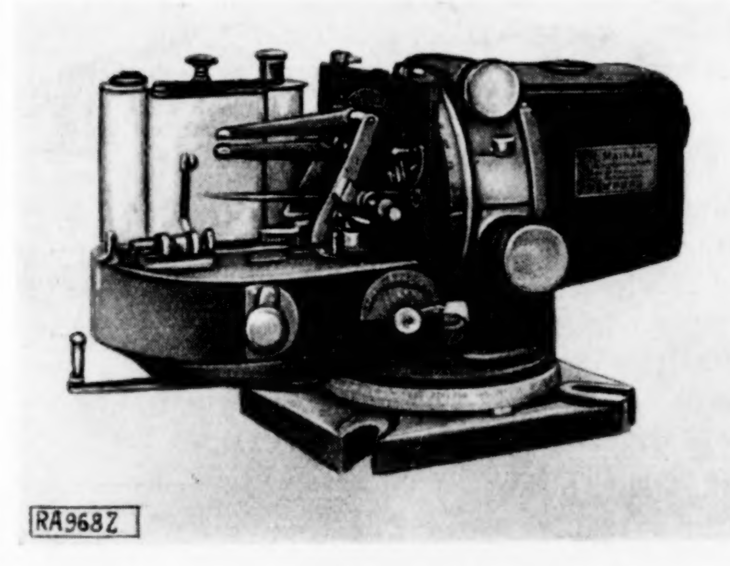


Abb. 1c.

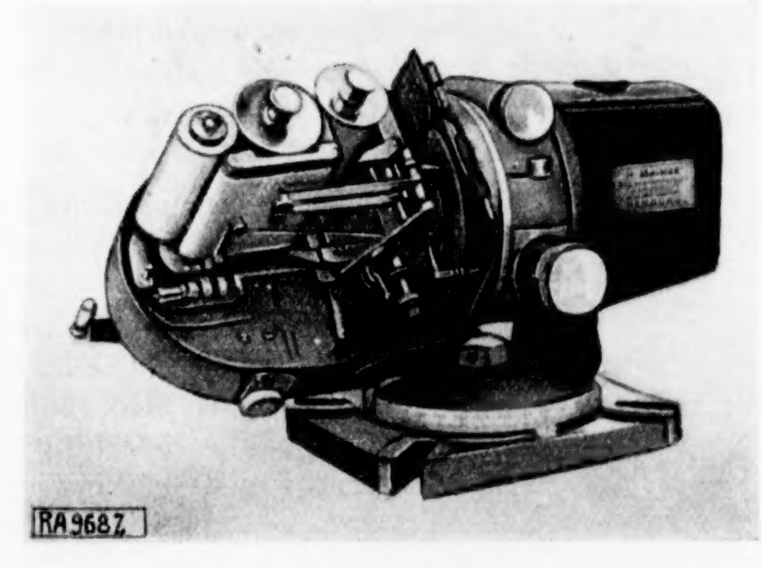


Abb. 1d.

die Dämpfung der Eigenschwingungen eines solchen Instrumentes im wesentlichen auf Reibung zurückzuführen ist. Abb. 2 zeigt Eigenschwingungsdiagramme des Instrumentes. Der Schreibstift wurde jedesmal einmal ausgelenkt und losgelassen. Die Diagramme zeigen die Schwingungsbewegung der trägen Masse beim Zurückpendeln in die Gleichgewichtslage mit einer Vergrößerung von 5 : 1.

Abb. 2.

Die Dämpfung ist verhältnismäßig groß, denn das Gewicht kommt schon nach zwei vollen Schwingungen bei Auslenkung um 3 mm nach einer Seite (Schreibstift 15 mm!) wieder zur Ruhe. Wie die Diagramme zeigen, ist das Dekrement der gedämpften Schwingungslinie konstant, denn ihre Scheitelpunkte liegen auf 2 Geraden, die sich in dem Punkt, in dem die Gleichgewichtslage wieder erreicht wird, auf der Mittellinie der Schwingung schneiden. Es handelt sich hier demnach um eine reine Reibungsdämpfung. Bei einer Geschwindigkeitsdämpfung, wo die Dämpfungskraft der Geschwindigkeit der Bewegung proportional wäre, würden die Scheitelpunkte der Schwingungskurve auf gleichseitigen Hyperbeln liegen.

2. Einfluß einer Reibungsdämpfung auf die Empfindlichkeit. Wäre eine übrigens unvermeidbare Reibungsdämpfung bei Schwingungsmessern auch auf jeden Fall schädlich, oder erwünscht, und wie groß müßte sie sein? Mit diesen Fragen wollen wir uns im folgenden etwas näher beschäftigen.

Es leuchtet ohne weiteres ein, daß Reibung die Empfindlichkeit des Instrumentes herabsetzt. Es spricht erst an, wenn die Beschleunigungen der erzwungenen Bewegung der Unterlage die Reibungsverzögerungen an Größe übertreffen. Andererseits wird jede noch so kleine Bewegung registriert, sobald sich der Schreibstift auf dem Papier überhaupt bewegt. Man braucht also nicht zu befürchten, daß alle Feinheiten der Schwingungsform durch die Reibung verwischt werden. Sie ist nach oben hin nur durch die gewünschte Empfindlichkeit begrenzt, d. h., die kleinste Beschleunigung, auf die das Instrument noch ansprechen soll.

3. Ableitung der Bewegungsgleichungen. Welchen Einfluß Reibungsdämpfung auf die formechte Wiedergabe der Bewegungen durch die Diagrammkurven ausübt, wollen wir an Hand der aufzustellenden Bewegungsgleichungen untersuchen.

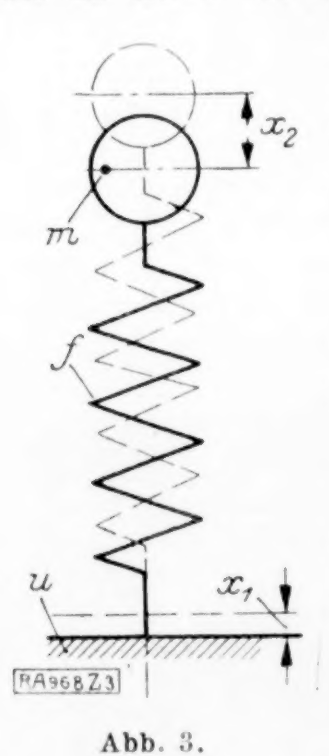


Abb. 3.

Abb. 3 stellt schematisch einen Schwingungsmesser dar. m ist die träge Masse, die frei schwebend durch die Feder F mit der Unterlage U verbunden ist. Die Unterlage möge Schwingungen ausführen, und zwar wollen wir zunächst der Einfachheit halber annehmen, daß die Bewegung eine reine Sinusschwingung sei. Man kann diese Bewegunng darstellen durch die Gleichung:

$$x_1 = C \sin w t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

x_1 ist der momentane Abstand der Unterlage von ihrer Mittellage. C ist die Amplitude der Schwingung. Die Bewegung der trägen Masse M kann beschrieben werden durch die Differentialgleichung:

$$\frac{d^2 x_2}{d t^2} + \alpha^2 (x_2 - x_1) \pm r = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

x_2 ist die Auslenkung der Masse M aus ihrer Gleichgewichtslage, α^2 ist die Federkonstante, r die Reibungsbeschleunigung. Das doppelte Vorzeichen vor r bedeutet, daß sie der augenblicklichen Bewegungsrichtung stets entgegengesetzt gerichtet ist. In den Scheitelpunkten der Schwingungskurve wechselt das Vorzeichen. Das positive Vorzeichen gilt also, solange sich die Feder F verkürzt, das negative, solange sie sich längt.

Aus Gl. (1) setzen wir den Wert für x_1 in Gl. (2) ein:

$$\frac{d_2 x_2}{d t^2} + \alpha^2 x_2 = \alpha^2 C \sin w t \mp r \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Gl. (3) hat abgesehen vom Störungsglied r die normale Form der Gleichung einer erzwungenen Schwingung. Ihre Lösung lautet:

$$x_2 = A\cos\alpha t + B\sin\alpha t + \frac{C\alpha^2}{\alpha^2 - w^2}\sin w t \mp \frac{r}{\alpha^2} \quad \ldots\ldots \quad (4).$$

Die Ordinaten der Diagrammlinie auf der Schreibtrommel entsprechen, abgesehen von der Vergrößerung des Schreibhebelwerkes, der Differenz der Bewegungen von Unterlage und träger Masse, also der Relativbewegung zwischen beiden. Ihre Größe erhält man aus der Differenz der Gl. (1) und (4):

$$\left.\begin{aligned} x_2 - x_1 &= \left(A\cos\alpha t + B\sin\alpha t + \frac{C\alpha^2}{\alpha^2 - w^2}\sin w t \mp \frac{r}{\alpha^2} - C\sin w t\right) \\ &= A\cos\alpha t + B\sin\alpha t + \frac{C w^2}{\alpha^2 - w^2}\sin w t \mp \frac{r}{\alpha^2} \end{aligned}\right\} \quad (5).$$

Für die weitere Behandlung der Aufgabe ist es zweckmäßiger, den Ausdruck noch etwa umzuformen und in der Form zu schreiben:

$$x_2 - x_1 = D\sin(\alpha t + \varphi) + \frac{C w^2}{\alpha^2 - w^2}\sin w t \mp \frac{r}{\alpha^2} \quad \ldots\ldots \quad (6).$$

Hier ist D die Amplitude der Eigenschwingung und φ ihre Phasenverschiebung zur Zeit $t = 0$ gegenüber der Sinusschwingung der Unterlage.

Da das Reibungsglied in jedem Scheitelpunkt sein Vorzeichen wechselt, gilt bei gegebenen Anfangsbedingungen das Integral der Gl. (5) stets nur bis zum nächsten Scheitelpunkt der Schwingungskurve. Die Endbedingungen hier sind gleichzeitig die Anfangsbedingungen für die bis zum übernächsten Scheitelpunkt geltende Lösung, usw. Die Ausführung der Rechnung wird also sehr umständlich und zeitraubend. Vor allem kann man von vornherein nicht übersehen, ob sich bei periodischer Erregung auch ein periodischer, stationärer Bewegungszustand der trägen Masse einstellt. Selbst wenn die Rechnung, die sich stets nur für einen speziellen Fall durchführen läßt, ergeben sollte, daß das der Fall ist, wäre damit durchaus noch nicht bewiesen, daß es immer so sein müßte. Wir wollen uns deshalb damit begnügen, die Tatsache, daß sich bei periodischer Erregung auch bei Reibungsdämpfung ein stationärer Bewegungszustand einstellt, nur aus der Erfahrung bzw. dem Experiment herzuleiten.

Abb. 4 — 5 zeigen mit dem Schwingungsmesser von Maihak erhaltene Bewegungsbilder von Erschütterungen, die von einer nicht ganz ausgewuchteten Maschine konstanter Drehzahl ausgehen. Trotz der komplizierten Formen der Bewegung erkennt man deutlich

Abb. 4. Abb. 5.

die genaue Wiederholung der Diagrammformen in gleichbleibenden Abständen. Beobachtungen und Messungen ergaben die Uebereinstimmung der Periodizität der Bewegungsbilder mit der Drehzahl der Maschine.

Bei Anwendung dieser Erkenntnis auf unsere einfache Sinusschwingung ergibt die Ueberlegung, daß ein periodisches Bewegungsbild nur möglich ist, wenn die Maxima und Minima sich symmetrisch um eine Mittellage gruppieren und unter sich ihrer absoluten Größe nach gleich sind. Außerdem muß auf ein Maximum stets im zeitlichen Abstand einer halben Schwingung der Unterlage das nächste Minimum folgen, und auf dieses wieder im gleichen Abstand das nächste Maximum usw.! Wird z. B. zur Zeit t_1 ein Maximum der Schwingung erreicht, und zur Zeit t_2 das darauffolgende Minimum, so besteht also die Beziehung:

$$t_2 = t_1 + \pi / w \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7).$$

In den Scheitelpunkten zu den Zeiten t_1 und t_2 sind die Tangenten der Bewegungskurve zur Abszissenachse parallel; die ersten Ableitungen der Bewegungsgleichung nach der Zeit verschwinden also in diesen Punkten:

$$D\alpha\cos(\alpha t_1 + \varphi) + \frac{C w^3}{\alpha^2 - w^2}\cos w t_1 = 0 \quad \ldots\ldots \quad (8).$$

$$D\alpha\cos(\alpha t_2 + \varphi) + \frac{C w^3}{\alpha^2 - w^2}\cos w t_2 = 0 \quad \ldots\ldots \quad (9).$$

Durch Addition der Gl. (8) und (9) und mit Gl. (7) erhält man:

$$D\,\alpha\cos(\alpha t_1+\varphi)+D\,\alpha\cos(\alpha t_2+\varphi)+\frac{C\,w^3}{\alpha^2-w^2}\cos w\,t_1+\frac{C\,w^3}{\alpha^2-w^2}\cos w\,t_2=D\,\alpha\cos(\alpha t_1+\varphi)$$

$$+D\,\alpha\cos\left(\alpha t_1+\varphi+\frac{\alpha\,\pi}{w}\right)+\frac{C\,w^3}{\alpha^2-w^2}\cos w\,t_1+\frac{C\,w^3}{\alpha^2-w^2}\cos(w\,t_1+\pi)$$

$$=D\,\alpha\cos(\alpha t_1+\varphi)+D\,\alpha\cos\left(\alpha t_1+\varphi+\frac{\alpha\,\pi}{w}\right)=0 \quad \ldots\ldots \quad (10);$$

$$\cos(\alpha t_1+\varphi)+\cos\left(\alpha t_1+\varphi+\frac{\alpha\,\pi}{w}\right)=0 \quad \ldots\ldots \quad (11).$$

Diese Gleichung hat unendlich viele Lösungen, die im Endergebnis bei unseren Untersuchungen jedoch zum gleichen Resultat führen. Wir beschränken uns deshalb auf die erste:

$$\alpha t_1+\varphi=\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{\alpha}{w}\right) \quad \ldots\ldots \quad (12).$$

Für das Maximum zur Zeit t_1 erhält man mit Gl. (6) den Wert:

$$(x_2-x_1)_{\max}=D\sin\left[\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{\alpha}{w}\right)\right]+\frac{C\,w^2}{\alpha^2-w^2}\sin w\,t_1+\frac{r}{\alpha^2} \quad \ldots \quad (13).$$

Hinter dem Maximum wirkt die Reibungsbeschleunigung beim Abwärtsschwingen nach oben; deshalb das positive Vorzeichen vor r/α^2!

$$(x_2-x_1)_{\min}=D\sin\left[\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{\alpha}{w}\right)\right]-\frac{C\,w^2}{\alpha^2-w^2}\sin w\,t_1+\frac{r}{\alpha^2} \quad \ldots \quad (14).$$

Wie schon weiter oben gesagt wurde, müssen die Ausschläge beim stationären Bewegungszustand nach oben und unten gleich groß sein:

$$(x_2-x_1)_{\max}=-(x_2-x_1)_{\min} \quad \ldots\ldots \quad (15).$$

Einsetzen der Werte aus den Gl. (13) und (14):

$$D\sin\left[\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{\alpha}{w}\right)\right]+\frac{Cw^2}{\alpha^2-w^2}\sin wt_1+\frac{r}{\alpha^2}=-D\sin\left[\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{\alpha}{w}\right)\right]+\frac{Cw^2}{\alpha^2-w^2}\sin wt_1-\frac{r}{\alpha^2} \quad (16).$$

$$2\,D\sin\left[\frac{\pi}{2}\left(1\pm\frac{\alpha}{w}\right)\right]+\frac{2\,r}{\alpha^2}=0 \quad \ldots\ldots \quad (17).$$

Hieraus erhält man die Integrationskonstante D:

$$D=\frac{-r}{\alpha^2\sin[\pi/2\,(1\pm\alpha/w)]} \quad \ldots\ldots \quad (18).$$

Einsetzen in Gl. (6):

$$x_2-x_1=\left(\frac{-r\sin(\alpha t+\varphi)}{\alpha^2\sin[\pi/2\,(1\pm\alpha/w)]}+\frac{Cw^2}{\alpha^2-w^2}\sin w\,t\pm\frac{r}{\alpha^2}\right)$$

$$=\frac{Cw^2}{\alpha^2-w^2}\sin wt+\frac{r}{\alpha^2}\left[\pm 1-\frac{\sin(\alpha t+\varphi)}{\sin[\pi/2\,(1\pm\alpha/w)]}\right] \quad \ldots \quad (19).$$

Diese Gleichung liefert mit Gl. (12):

$$(x_2-x_1)_{\max}=\frac{Cw^2}{\alpha^2-w^2}\sin wt_1 \quad \ldots\ldots \quad (20),$$

und

$$(x_2-x_1)_{\min}=\frac{Cw^2}{\alpha^2-w^2}\sin wt_2=-\frac{Cw^2}{\alpha^2-w^2}\sin wt_1 \quad \ldots \quad (21).$$

Den Winkel wt_1 erhält man aus Gl. (8):

$$\cos w\,t_1=-\frac{D\,\alpha\cos(\alpha t_1+\varphi)\,(\alpha^2-w^2)}{C\,w^3} \quad \ldots\ldots \quad (22).$$

Mit Gl. (12) und (18):

$$\cos w\,t_1=\frac{r\,\alpha\cos[\pi/2\,(1\pm\alpha/w)]\,(\alpha^2-w^2)}{\alpha^2\sin[\pi/2\,(1\pm\alpha/w)]\,C\,w^3}=\frac{r}{\alpha^2 C}\,\frac{\alpha}{w}\left(\frac{\alpha^2}{w^2}-1\right)\cdot\cot\left[\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{\alpha}{w}\right)\right] \quad (23).$$

4. Diskussion der Bewegungsgleichung. Falls die Eigenfrequenz des Instrumentes wesentlich kleiner ist als die Frequenz der zu messenden Erschütterungen der Unterlage, wie es bei einem guten Instrument mit geringer Eigenfrequenz meistens der Fall ist, erhält man für $\lim \alpha/w=0$:

$$\cos wt_1=0;\quad wt_1=\pi/2 \quad \ldots\ldots \quad (24),$$

und damit

$$\sin wt_1=\sin\pi/2=1 \quad \ldots\ldots \quad (25),$$

$$(x_2-x_1)_{\max}=\frac{Cw^2}{\alpha^2-w^2} \quad \ldots\ldots \quad (26).$$

Hier verschwindet also der Einfluß der Reibung auf die Amplitude der im Diagramm verzeichneten Schwingung vollständig, und man erhält denselben Ausschlag des Schreibstiftes auf der Trommel wie beim dämpfungsfreien Instrument.

Im übrigen erkennt man aus der Formel und aus den Gl. (23) und (20), daß die verhältnismäßige Höhe der Diagramme, außer vom Frequenzverhältnis, von dem Faktor $\frac{r}{\alpha^2 \cdot C}$ abhängt.

Den Schwingungsausschlag des Diagramms im Verhältnis zur wahren Schwingungsamplitude als dimensionslose Zahl liefert Gl. (19), wenn man beide Seiten der Gleichung durch C dividiert:

$$\frac{x_2 - x_1}{C} = \frac{w^2}{\alpha^2 - w^2} \sin wt + \frac{r}{C\alpha^2}\left[\pm 1 - \frac{\sin(\alpha t + q)}{\sin[\pi/2\,(1 \pm \alpha/w)]}\right] \quad . \quad . \quad . \quad (27).$$

Der Einfluß der Reibung auf die Bewegung wächst also mit abnehmender Eigenfrequenz. Diese findet deshalb nach unten hin ihre Grenze durch das unvermeidliche Anwachsen der Reibungseinflüsse mit seiner nachteiligen Wirkung auf die Empfindlichkeit des Instrumentes. Daß der verhältnismäßige Einfluß der Reibung bei zunehmender Schwingungsamplitude zurücktreten wird, leuchtet ohne weiteres ein.

Der Einfluß der Reibung auf die Schwingungsweiten ist allein durch den Wert gegeben, den jeweils $\sin wt_1$ annimmt. Ergibt z. B. in einem besonderen Fall die Rechnung für $\sin wt_1$ den Zahlenwert 0,9, so bedeutet das, daß die Diagrammhöhen infolge der Reibungsdämpfung um 10 vH kleiner werden, als man sie unter sonst ganz gleichen Verhältnissen mit einem dämpfungsfreien Schwingungsmesser erhielte.

Aus dem Eigenschwingungsdiagramm der Abb. 2 kann man für den Schwingungsmesser von **Maihak** unter Berücksichtigung der Schreibhebelvergrößerung den das Verhalten des Instrumentes charakterisierenden Faktor r/α^2 berechnen. Die Eigenfrequenz ist $\alpha = 6{,}8$.

Die sechs Scheitelpunkte des Diagramms haben die Ordinaten:

$$-15\ \text{mm}; \quad +12\ \text{mm}; \quad -9\ \text{mm}; \quad +6\ \text{mm}; \quad -3\ \text{mm}; \quad +0\ \text{mm}.$$

Das lineare Dekrement der Schwingungsamplituden pro Halbschwingung ist also:

$$15 - 12 = 12 - 9 = 9 - 6 = 6 - 3 = 3 - 0 = 3\ \text{mm} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28).$$

Die Dauer einer halben Schwingung ist:

$$\frac{T}{2} = \frac{\pi}{\alpha} = \frac{\pi}{6{,}8} = 0{,}462\ \text{sek} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29).$$

Die Reibungsbeschleunigung, die die Amplitudenabnahme der Schwingung verursacht, ist also:

$$r_1 = \frac{2{,}3}{0{,}462^2} = 28\ \text{mm/sek}^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30).$$

Die Reibungsbeschleunigung r ist im Verhältnis der Hebelübersetzung kleiner als die Beschleunigung des Schreibstiftes. Die Vergrößerung, mit der das Eigenschwingungsdiagramm im vorliegenden Falle gezeichnet wurde, ist 5 : 1. Die Reibungsbeschleunigung der trägen Masse war demnach:

$$r = \frac{r_1}{5} = 5{,}6\ \text{mm/sec}^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31).$$

Kennzahl:

$$\frac{r}{\alpha^2} = \frac{5{,}6}{6{,}8^2} = 0{,}1214\ \text{mm} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32).$$

Bei den weiter unten zu beschreibenden Versuchen mit dem Schwingungsmesser war die Schwingungsamplitude zunächst:

$$C = 2{,}5\ \text{mm} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33).$$

Damit wird der Einflußfaktor der Gl. (27):

$$\frac{r}{C\alpha^2} = \frac{0{,}1214}{2{,}5} = 0{,}0486 = \sim 0{,}05 \ \text{(dimensionslose Zahl!)} \quad . \quad . \quad . \quad (34).$$

Man kann jetzt für verschiedene Frequenzverhältnisse w/α die Größe von $\sin wt_1$ mit Hilfe von Gl. (23) berechnen. Zahlentafel 1 enthält die Ergebnisse einer solchen Berechnung unter Zugrundelegung der Kennzahl der Gl. (34).

Zahlentafel 1.

$\frac{\omega}{\alpha}$	0,5	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0
$\frac{r}{\alpha^2 C} = 0{,}05$	1,0000	0,9980	0,9998	0,9999	1,0000	1,0000
» $= 0{,}10$	1,0000	0,9918	0,9993		0,9999	1,0000
» $= 0{,}20$	1,0000	0,9669	0,9972	0,9994	0,9998	

Die Zahlen lassen erkennen, daß der Einfluß der Reibungsdämpfung auf die Schwingungsamplituden verschwindend klein wird, sobald die Frequenz der Schwingung die Eigenfrequenz des Instrumentes nur wenig übertrifft. Selbst im Resonanzfall bleibt die Schwingungsamplitude des reibungsgedämpften Instrumentes nur um 0,2 vH hinter der des ungedämpften Instrumentes zurück, wie eine Grenzwertberechnung ergibt. Der Ausschlag des reibungslosen Instrumentes wird im Resonanzfall theoretisch unendlich groß. Die Zahlentafel enthält noch die Rechnungsergebnisse für einige andere Dämpfungsfaktoren. Für

$$r = \frac{2 \cdot 2{,}5}{0{,}462^2} = 23{,}3 \text{ mm/sec}^2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (35)$$

wird die gedämpfte Eigenschwingung bei den vorliegenden Verhältnissen aperiodisch. Die Kennzahl wird hierbei:

$$\frac{r}{C\alpha^2} = 0{,}203 = \sim 0{,}2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (36).$$

Auch bei dieser sehr starken Dämpfung sind die Unterschiede der Amplituden beim gedämpften und ungedämpften Instrument noch nicht erheblich.

Abb. 6 zeigt die Rechnungsergebnisse der Zahlentafel in übersichtlicher graphischer Darstellung. In Abhängigkeit von den Frequenzverhältnissen w/α als Abszissen sind die Verhältnisse der Diagrammhöhen mit und ohne Reibungsdämpfung als Ordinaten aufgetragen.

Abb. 7 gibt eine andere Darstellung der Verhältnisse. Hier sind die im Diagramm erhaltenen Schwingungsamplituden selbst als Ordinaten in Abhängigkeit von den Frequenz-

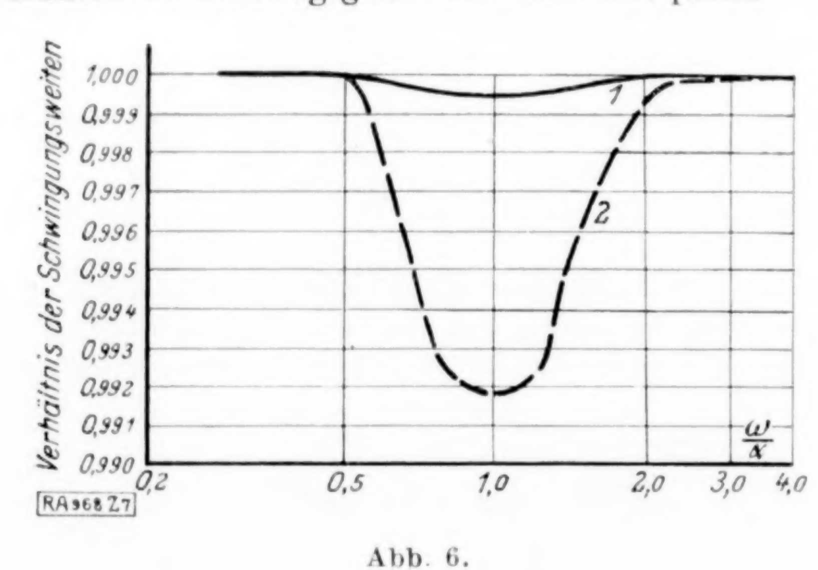


Abb. 6.

Abb. 7.

verhältnissen als Abszissen aufgetragen, und zwar einmal für einen dämpfungsfreien Apparat (Kurve 1), dann für aperiodische Reibungsdämpfung entsprechend dem behandelten Beispiel und schließlich noch zum Vergleich für aperiodische Geschwindigkeitsdämpfung (Dämpfung der Relativgeschwindigkeit zwischen Unterlage und träger Masse proportional!).

Die im Abstand der Schwingungsamplitude der Unterlage zur Abszissenachse gezogene Parallele läßt erkennen, wie weit die registrierten Schwingungsausschläge hinter den wahren zurückbleiben oder sie übertreffen.

Abb. 8 zeigt für die gleichen 3 Fälle die absoluten Schwingungsausschläge der trägen Masse und Abb. 9 schließlich die Anzeigeabweichungen gegenüber dem dämpfungsfreien Instrument selbst in Prozenten der wahren Schwingungsamplitude.

Das Ergebnis der bisherigen theoretischen Untersuchungen ist, daß der Anzeigefehler eines mechanischen Schwingungsmessers durch eine mäßige Reibungsdämpfung praktisch nicht beeinflußt wird, wenn es sich darum handelt, periodisch wiederkehrende Schwingungsvorgänge zu registrieren, wohingegen Geschwindigkeitsdämpfung aus theoretischen Gründen vielleicht abzulehnen ist. Erstere ist also bis zu einer gewissen Größe sogar entschieden von Vorteil, da sie von einmaligen Impulsen herrührende übermäßige Schwingungsausschläge dämpft. Andererseits ist sie im Gegensatz zur Geschwindigkeitsdämpfung nicht imstande, bei Resonanzerscheinungen übermäßig große Schwingungsausschläge zu verhindern.

Abb. 8.

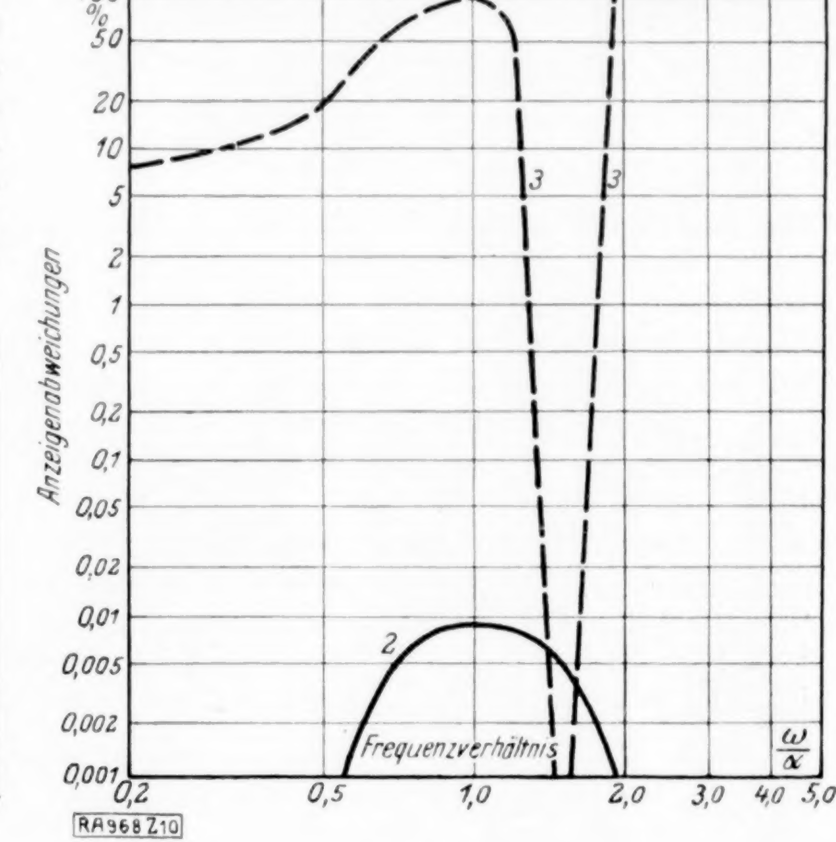


Abb. 9.

5. Ausdehnung der Rechnungsergebnisse auf beliebige Schwingungsformen. Genau genommen gelten die bisher gewonnenen Ergebnisse nur für eine reine Sinusschwingung der Unterlage. Man kann aber leicht übersehen, daß sich ihr Geltungsbereich ohne weiteres auf alle solche Schwingungsformen ausdehnen läßt, bei denen sich zwischen je einem Maximum und Minimum die Bewegungsrichtung nicht umkehrt (vergl. die Schwingungsform der Abb. 10!). Denkt man sich nämlich die Schwingungsform nach Fourier aufgelöst, so tritt in Gl. (19) an die Stelle des ersten Gliedes auf der rechten Seite ein Summenausdruck, so daß die Gleichung die Form annimmt:

$$x_2 - x_1 = \Sigma \frac{C_\nu (r w)^2}{\alpha^2 - (r w)^2} \sin(r w t) + \frac{r}{\alpha^2}\left[\pm 1 - \frac{\sin(\alpha t + \eta)}{\sin[\pi/2\,(1 \pm \alpha/w)]}\right] \quad . \quad . \quad (37).$$

Auf diese Gleichung lassen sich sämtliche für die reine Sinusschwingung angestellten Ueberlegungen mit gleichem Endergebnis übertragen, mit dem einzigen Unterschied, daß die Maxima und Minima sich nicht immer symmetrisch um die Mittellage der Schwingungen gruppieren. Man muß deshalb über den Bereich einer vollen Schwingung integrieren.

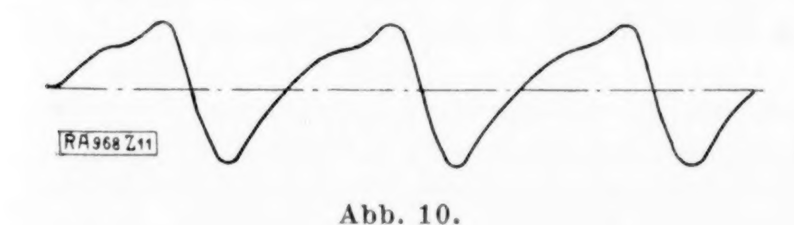


Abb. 10.

Abb. 11.

Komplizierter werden die Verhältnisse bei einer Schwingungsform, wie sie beispielsweise Abb. 11 zeigt. Hier kehrt die Bewegungsrichtung zwischen den Punkten A und B vorübergehend um. Die Beibungsbeschleunigung wechselt in diesem Bereich deshalb auch ihr Vorzeichen. Wie dieser Richtungswechsel der Reibungskraft die Diagrammform beeinflußt, zeigt am einfachsten folgende Ueberlegung:

Wir nehmen zunächst an, daß die Reibungskraft ihr Vorzeichen nicht wechselt im Bereich $A-B$. Dann erhält man nach den bisherigen Erwägungen Schwingungsausschläge

im Diagramm, die sich nur unmerklich von denen unterscheiden, die ein dämpfungsfreies Gerät aufzeichnen würde. Zum Ausgleich der fehlerhaften Annahme über die Reibungskraft im Bereich von $A - B$ denken wir uns jetzt hier außerdem die doppelte Reibungskraft in entgegengesetztem Sinne, wie zuerst angenommen, wirken. Diese im zeitlichen Abstand einer vollen Schwingungsdauer gleichmäßig aufeinanderfolgenden Impulse würden allein eine Bewegung entsprechend Abb. 12 erzeugen, die sich in Wirklichkeit der andern Bewegung überlagert.

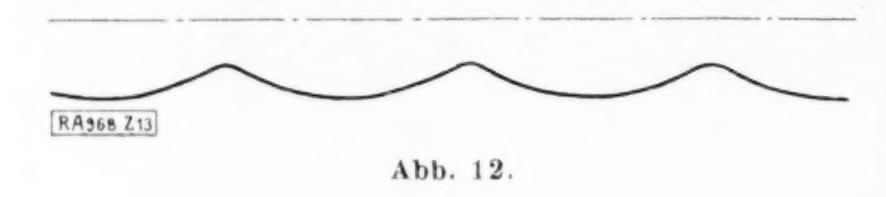


Abb. 12.

Man erkennt aus der Abbildung, daß die Hauptwirkung der Impulse in einer Verschiebung der Mittellage der Schwingung besteht, da die Sinusbogen zwischen den einzelnen Impulsen bei einigermaßen großen Frequenzverhältnissen w/α sehr flach werden, um schließlich für $\lim w/\alpha = \infty$ in eine zur Abszissenachse parallele Gerade überzugehen.

Diese Betrachtungen zeigen, daß man die für die Sinusschwingungen abgeleiteten Beziehungen unbedenklich verallgemeinern und auf jede beliebige periodische Schwingungsform anwenden kann.

Der Vollständigkeit halber sei noch darauf hingewiesen, daß eine dem Diagramm des stationären, periodischen Zustandes überlagerte Eigenschwingung des Instrumentes theoretisch unter bestimmten Umständen nicht abzuklingen braucht, sondern stehen bleibt. Das ist ein Nachteil der Reibungsdämpfung gegenüber der Geschwindigkeitsdämpfung, die jede Eigenschwingung in kurzer Zeit unterdrückt.

6. Beschreibung der Versuche. Zur experimentellen Nachprüfung der theoretischen Ergebnisse wurde der Schwingungsmesser von Maihak auf einem Rütteltisch befestigt, der in schwingende Bewegungen versetzt werden konnte. Abb. 13 zeigt einen Schnitt durch den Rütteltisch. Der eigentliche Rütteltisch 1 ist auf der einen Seite auf einer Exzenterwelle 3 gelagert und auf der andern Seite mit dem Schwinghebel 2 gelenkig verbunden. Wenn sich die Exzenterwelle, die mittels Riemen und Riemenscheibe durch einen Elektromotor angetrieben werden kann, dreht, führt der Tisch eine schwingende Bewegung aus.

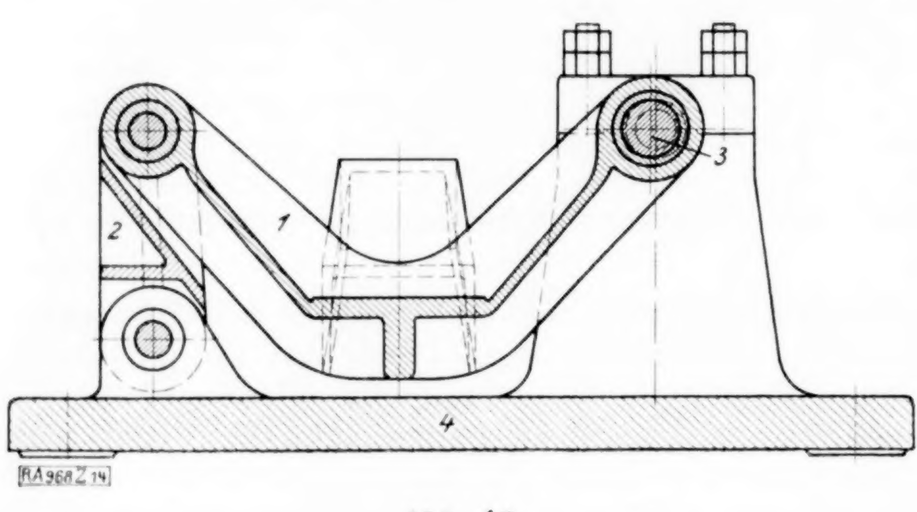


Abb. 13.

Die Grundplatte 4 des Rütteltisches war bei den Versuchen auf einem sehr schweren Betonfundamentklotz montiert, um merkliche Fehler durch Fundamenterschütterungen mit Sicherheit auszuschließen. Der Rütteltisch selbst war mit Rücksicht auf die Massenkräfte aus Elektron gefertigt.

Abb. 14 zeigt die ganze Versuchsanordnung mit dem auf dem Rütteltisch befestigten Schwingungsmesser. Die von dem Apparat tatsächlich ausgeführten Schwingbewegungen konnte man aus den an den Meßstellen 1 und 2 durch direkte Aufzeichnungen gewonnenen Bewegungsdiagrammen ableiten.

Die Meßstelle 1 lag in der Verlängerung der wagerechten Längsschwerachse des Pendelgewichts im Apparat. Die Schwingbewegung an dieser Stelle konnte mit einem feststehenden Blei- oder Silberstift direkt auf das mitschwingende Diagrammblatt 5 aufgezeichnet werden. Da die Schwingbewegungen bei den Untersuchungen nur klein waren, fielen die Diagramme selbst natürlich auch nur entsprechend klein aus.

An der Meßstelle 2 wurden die hin und hergehenden Bewegungen des Tisches unter Vermittlung eines kraftschlüssigen Zugstangenantriebes, durch Hebelübersetzung vergrößert, auf ein sich gleichmäßig fortbewegendes Diagrammblatt aufgezeichnet. Als Meßstelle 3 ist die Schreibtrommel des Schwingungsmessers selbst bezeichnet.

Die Größe der Bewegung konnte durch Auswechseln der Antriebsexzenterwellen verändert werden. Die Drehzahl des die Vorrichtung mit einem Riemen antreibenden Elektromotors war in weiten Grenzen regulierbar.

Es wurden Messungen mit 1,5 und 2,5 mm Exzentrizität der Antriebswelle ausgeführt. Die horizontalen Schwingungsweiten zwischen den Endlagen waren also 3 und 5 mm. Der Schwingungsmesser war so eingestellt, daß er nur die horizontalen Bewegungen aufzeichnete.

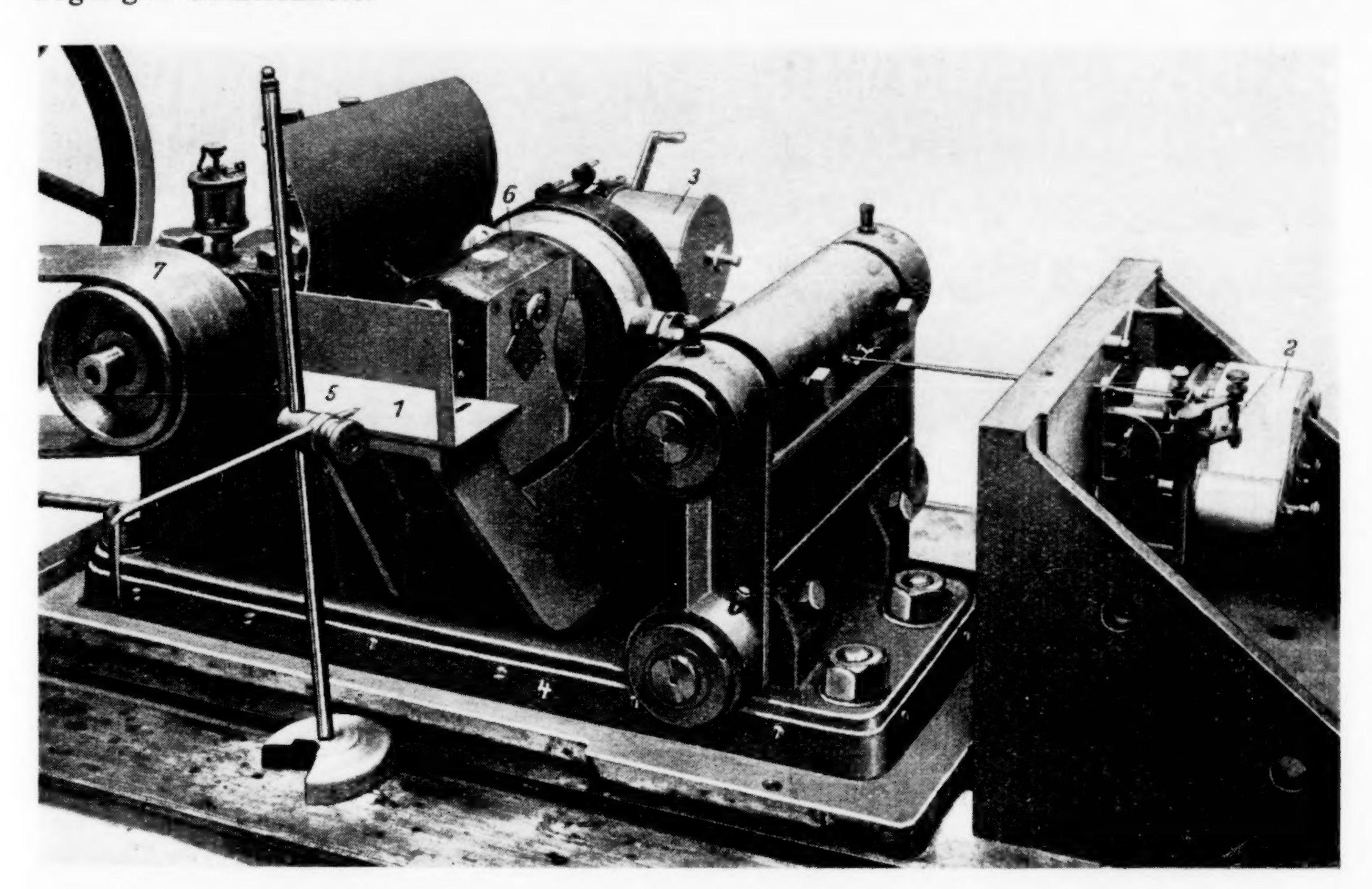


Abb. 14.

7. Versuchsergebnisse. Die Abb. 15 bis 20 zeigen Diagramme von 3 verschiedenen Versuchen und von Kontrollmessungen. In Zahlentafel 2 sind die Versuchszahlen und -Ergebnisse übersichtlich zusammengestellt.

Zahlentafel 2.

Versuch Nr.	Drehzahl pro Minute	Schwingungsweiten in mm				w/a	Abb.
		Meßstelle 1	Meßstelle 2	Meßstelle 3	theoretisch, ohne Dämpfung		
4	240	5	4,96	5,6	5,35	3,7	22, 23, 24
6	600	3,1	3,06	3,1	3,13	9,05	19, 20, 21
7	400	3,1	3,1	3,0	3,18	6,18	16, 17, 18

Im ganzen bestätigen die Versuchsergebnisse die Theorie der reibungsgedämpften Schwingungen aufs beste. Die aufgezeichneten Schwingungsweiten stimmen praktisch genau mit denjenigen überein, die man theoretisch vom dämpfungsfreien Gerät erwarten würde. Bei einigermaßen hohen Frequenzverhältnissen w/a stimmen deshalb auch die registrierten Amplituden mit den wahren des Rütteltisches sehr genau überein.

3,1
RA968 Z16

Abb. 15.

Die Versuche bestätigen fernerhin die sich aus der Ueberlegung ergebende Tatsache, daß die Reibung übermäßig große Schwingungsausschläge bei Resonanz nicht unterbindet und sie, falls einmal vorhanden, nach erreichtem Beharrungszustand nicht auslöscht. Es gelang

15
RA968 Z17
1



Abb. 16.

nämlich beim Anfahren nur mit besonderer Geschicklichkeit und durch Festhalten des Schreibhebels, das kritische Resonanzgebiet zu durchfahren. Ohne besondere Vorsichtsmaßregeln schlug die träge Masse dauernd heftig gegen die Anschläge des Gehäuses und kam auch von selbst nicht wieder zur Ruhe, wenn die kritische Drehzahl schon weit überschritten war.

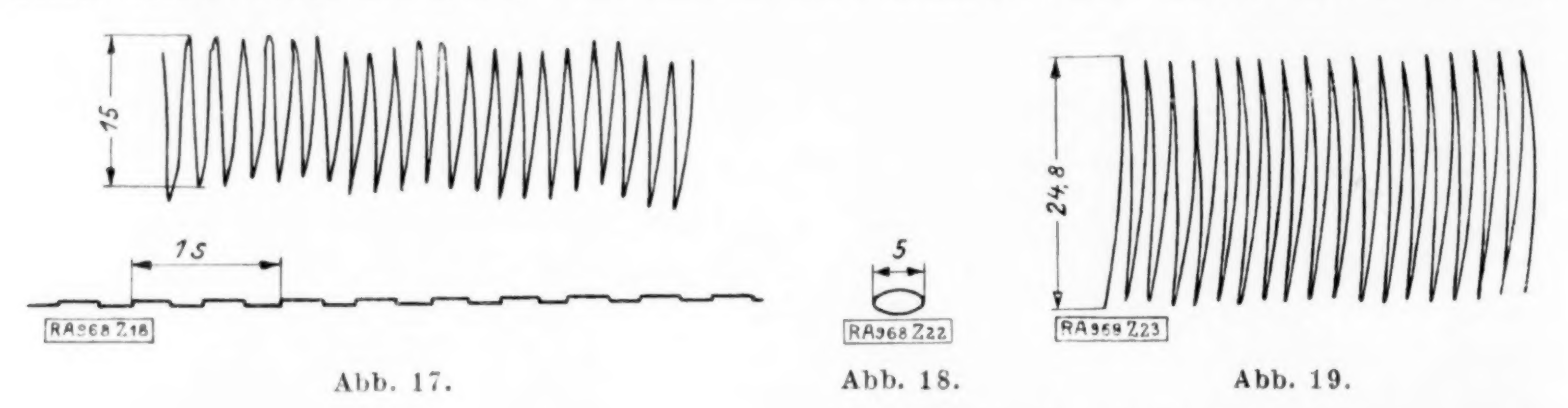


Abb. 17. Abb. 18. Abb. 19.

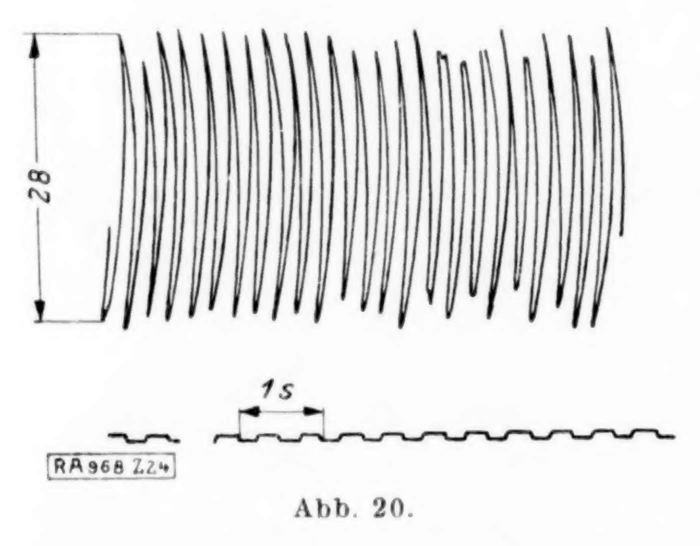


Abb. 20.

Abb. 17 zeigt die Möglichkeit der Ueberlagerung der errechneten Schwingungen des Beharrungszustandes durch eine Zeit lang nicht abklingende Eigenschwingungen der federnd aufgehängten trägen Masse. — Mit Rücksicht vor allem auf die Größe der Diagramme der Meßstelle 1 sind bei den Versuchen mit dem Rütteltisch die Schwingungsamplituden verhältnismäßig groß gewählt worden. In der Praxis sind häufig weit kleinere Schwingungsbewegungen zu registrieren. Proportional mit der Schwingungsweite nimmt, wie wir gezeigt hatten, die zulässige Reibungsbeschleunigung ab. Man muß die Reibung also den kleinsten Bewegungen anpassen.

8. Schlußfolgerungen. Am zweckmäßigsten wäre es, wenn die Reibung in gewissen Grenzen reguliert werden könnte. Im allgemeinen erfolgt diese Regulierung automatisch, jedoch im falschen Sinne. Um sehr kleine Schwingungen deutlich sichtbar zu machen, wendet man starke Vergrößerungen durch Hebelübersetzungen des Schreibzeuges an und umgekehrt. Die Folge ist, daß die auf die träge Masse reduzierte Reibungskraft bei kleinen Schwingungsweiten größer wird als bei großen, bei denen man eine kleinere Uebersetzung verwenden muß. Das kommt daher, daß die Reibung zwischen Schreibstift oder -feder und Schreibtrommel einen wesentlichen Beitrag zur Gesamtreibung liefert und diese am um so größeren Hebel angreift, je stärker die Vergrößerung ist.

Für die Registrierung sehr kleiner Schwingungen muß man also die Eigenreibung der bewegten Teile so klein wie möglich machen. Sie wird dann immer noch größer als erwünscht, schon mit Rücksicht auf den unbedingt erforderlichen Empfindlichkeitsgrad.

Bei Schwingungsbewegungen größerer Amplitude (beispielsweise Vibrationen von Schiffskörpern in der Nähe der Maschinen- und Schraubenanlage) ist dagegen eine nicht zu kleine Reibungsdämpfung durchaus am Platze. Man erkennt, daß es — wie so häufig — auch hier wieder abwegig sein dürfte, alle Meßbereiche mit einem einzigen Instrument bestreichen zu wollen. Man gelangt bestenfalls zu einer Kompromißlösung und darf sich nicht wundern, wenn die gleichen Schwingungsvorgänge von den Meßgeräten verschiedener Hersteller sehr unterschiedlich aufgezeichnet werden, da diese sich eigentlich nur für verschiedene Meßbereiche eignen. Für starke Erschütterungen eignen sich reibungsgedämpfte Instrumente mit nicht zu geringer Eigenfrequenz, für schwache Erschütterungen dämpfungsfreie mit möglichst kleiner Eigenfrequenz. Bei der ersten Gruppe muß die Eigenfrequenz naturgemäß auch immer noch genügend weit unterhalb der Frequenzen der Erschütterungen liegen.

Zusammenfassung. Es wird rechnerisch und experimentell der Einfluß von Reibungsdämpfung auf die Richtigkeit der Diagramme mechanischer Schwingungsmesser untersucht. Es wird gezeigt, daß unter gewissen Voraussetzungen eine mäßige Reibungsdämpfung von Vorteil sein kann und daß die Meßbereiche der Instrumente beschränkt sind. Diese müssen ihren besonderen Zwecken angepaßt werden, wenn sie brauchbare Ergebnisse liefern sollen. 968

Das Pendel mit oszillierendem Aufhängepunkt.

Von **PAUL HIRSCH** in München.

Daß Gleichgewichtslage und Stabilität eines Pendels durch schnelle, in irgend einer bestimmten Richtung erfolgende Oszillation seines Aufhängepunktes wesentlich beeinflußt wird, ist länger bekannt. In der Literatur ist das Problem meist mit Rücksicht auf sein elektrisches Analogon behandelt [1]). Ueber den mechanischen Effekt arbeiteten Stephenson [2]) und Hamel [3]).

Eine bekannte Art, dieses Problem zu vereinfachen, besteht in der Annahme einer auf den Aufhängepunkt des Pendels wirkenden Kraft, die nach einem sinus-Gesetz zeitlich veränderlich ist. Im Gegensatz dazu ist im folgenden durchwegs die wirkliche Bewegung des Aufhängepunktes als vorgeschrieben angenommen.

Einleitend werde der Sonderfall des mathematischen Pendels besprochen, für den sich der Effekt einfach und anschaulich berechnen läßt. Die Amplitude a der Oszillation sei klein im Vergleich zur Pendellänge c und die nach genau einer Oszillationsperiode erfolgte Verschiebung des Pendelschwerpunktes klein gegenüber dem Oszillationsweg $2a$.

Die Wirkung der Oszillation auf das Pendel hat an sich nichts mit der Schwerkraft zu tun. Da die einzige den Vorgang beeinflussende Masse die des Pendels ist, sind ihr alle auftretenden Kräfte proportional. Teilt man alle diese durch die Pendelmasse, so sind die Quotienten Beschleunigungen. Doch ist es im vorliegenden Falle für eine konkrete Vorstellung vorteilhafter, statt dessen »Kräfte pro Masseneinheit« zu sagen. Massen oder Kräfte kommen dann nicht mehr vor. Man sieht: Der Effekt ist im Wesen rein kinematisch. Die Oszillation erteilt dem Pendelschwerpunkt eine Beschleunigung, die nur von der Frequenz n und der Amplitude a der Oszillation, der Pendellänge c und dem Winkel φ zwischen Oszillationsrichtung und mittlerer Pendellage abhängt.

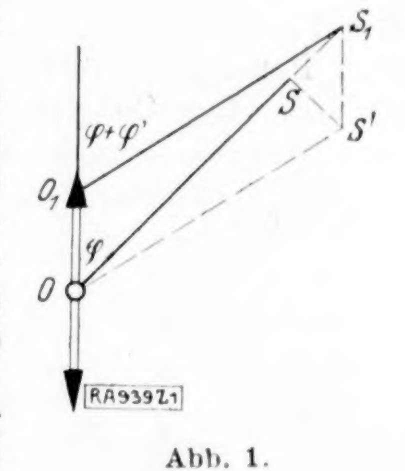


Abb. 1.

Die Pendelstange kann nur Zug- und Druckkräfte, aber keine zu ihr quer gerichteten Kräfte übertragen. Daher erfolgt die von der Oszillation dem Pendelschwerpunkt aufgezwungene Bewegung in erster Annäherung in der Richtung der Pendelstange. In Abb. 1 bezeichnet O die mittlere Stellung des Aufhängepunktes, O_1 seine augenblickliche Stellung, S die mittlere Lage des Pendelschwerpunktes und S_1 dessen augenblickliche Lage. Die augenblickliche Lage des Pendels $O_1 S_1$ parallel verschoben ist $O S'$. Aus der Zeichnung ist abzulesen, daß der Weg des Pendelschwerpunkts $s = S S_1$ und somit auch die ihm in dieser Richtung erteilte Beschleunigung nur das $\cos\varphi$ fache des vom Aufhängepunkte zurückgelegten Weges $x = O O_1 = a \sin 2\pi nt$ bzw. seiner Beschleunigung ist, sowie daß die Augenblickslage des Pendels mit seiner Mittellage den kleinen Winkel $\varphi' = \angle S' O S = \frac{x \sin\varphi}{c} = \frac{a}{c} \sin 2\pi nt \sin\varphi$ einschließt.

Zerlegt man die von der Oszillation dem Pendelschwerpunkt erteilte Beschleunigung in eine Komponente parallel der Pendelmittellage $O S$ und eine andere Komponente senkrecht zu dieser Richtung, so wird das über eine ganze Oszillationsperiode erstreckte Integral der ersteren Komponente verschwinden. Denn dieses Integral würde die Geschwindigkeit darstellen, welche nach Ablauf dieser Periode der Pendelschwerpunkt gegenüber dem anderen Endpunkt des Pendels erlangt hat. Somit besteht das zeitliche Mittel der gesamten Beschleunigung lediglich aus dem aus der zweiten Komponente gemittelten Werte und hat auch deren Richtung. Diese zweite Komponente hat den Augenblickswert $4\pi^2 n^2 a \sin 2\pi n t \cos\varphi \cdot \frac{a}{c} \sin 2\pi n t \sin\varphi$ und die Richtung $S' S$. Dem

[1]) Balth. van der Pol and Dr. M. J. O. Strutt, On the stability of the solutions of Mathieu's equation. Philosophical Magazine, Jan 1928. — Dort auch Literaturverzeichnis.

[2]) A. Stephenson, On a new type of dynamical stability. Memoirs and Proceedings of the Manchester Literary and Philosophical Society. Vol. 52 Nr. 8, 1908.

[3]) Georg Hamel, Ueber die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit periodischen Koeffizienten. 1913, Math. Ann., 73. Bd., Heft 3, S. 371.

Vorzeichen nach ist sie immer zur Oszillationsachse hin gerichtet. Der zeitliche Mittelwert davon ist

$$2\pi^2 n^2 \frac{a^2}{c} \sin\varphi \cos\varphi \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1).$$

Dies ist also der Effekt der Oszillation, wenn man eine Zeit von einer oder mehreren Oszillationsdauern in Betracht zieht. Der Effekt besteht in einer Beschleunigung des Pendelschwerpunktes in Richtung senkrecht zur Pendelstange. Bei dem bisher betrachteten Spezialfall hat diese Beschleunigung die Größe (1), schneidet die Oszillationsrichtung und ist zu dieser hin gerichtet.

Im folgenden soll der Effekt von Oszillationen allgemeinerer Art berechnet und dann das Gleichgewicht solcher Pendel besprochen werden.

I. Berechnung des Effektes.

1. Elliptische Oszillation. Der Aufhängepunkt des Pendels führe in zwei Richtungen harmonische Oszillationen von gleicher Frequenz n aus. Er beschreibt also eine Ellipse. Die Ebene, in der diese liegt, heiße Oszillationsebene. In ihr werde die Bewegung des Aufhängepunktes durch zwei rechtwinklige Koordinaten x und y beschrieben:

$$x = a\cos 2\pi n t\,, \qquad y = b \sin 2\pi n t\,.$$

Die positiven Richtungen der Koordinatenachsen lassen sich bei jeder Pendelrichtung so wählen, daß sie mit dieser spitze Winkel einschließen. Daß y hinter x um die Phasendifferenz $\pi/2$ zurückbleibt, bestimmt dann, welche die X-Achse und welche die Y-Achse ist. φ und ψ mögen die Winkel zwischen der mittleren Pendelrichtung und der X-Achse bzw. Y-Achse heißen.

ξ und η seien neue rechtwinklige Koordinaten in der Oszillationsebene, so daß

$$\xi = x\cos\omega + y\sin\omega\,, \qquad \eta = -x\sin\omega + y\cos\omega\,.$$

Die Projektion der Pendelrichtung auf die Oszillationsebene sei ξ-Achse. Sie bilde mit dem Pendel den Winkel χ und mit der X-Achse den Winkel ω. Beide sind positiv und spitzig. Der Cos-Satz für rechtwinklige Kugeldreiecke liefert:

$$\cos\varphi = \cos\omega\cos\chi\,, \qquad \cos\psi = \sin\omega\cos\chi$$

und daraus

$$\cos\chi = \sqrt{\cos^2\varphi + \cos^2\psi}\,, \qquad \operatorname{tg}\omega = \frac{\cos\psi}{\cos\varphi}\,.$$

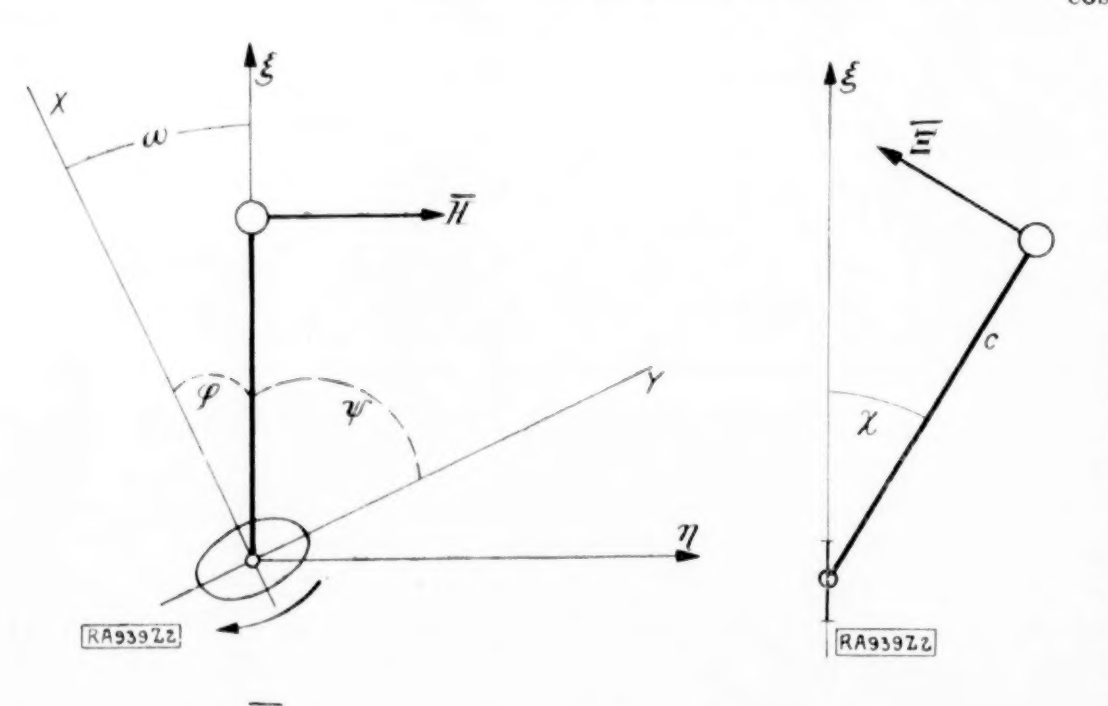


Abb. 2.

In Abb. 2 ist der Aufhängepunkt des Pendels in seiner Mittellage dargestellt, die er in Wirklichkeit niemals einnimmt. Die links oben stehende Ansicht zeigt die Oszillationsebene, also x und y in natürlichem Größenverhältnisse. Die Winkel φ und ψ erscheinen infolge der Projektion kleiner als sie sind, dagegen der Winkel ω in wirklicher Größe. Die rechtsstehende Seitenansicht zeigt die Oszillationsebene als vertikale Gerade und den Winkel χ in wirklicher Größe.

Die Einschränkungen seien die gleichen wie die in der Einleitung gemachten: Das Pendel sei ein mathematisches und der von seinem Schwerpunkt nach einer Oszillationsperiode zurückgelegte Weg, vektoriell summiert, sei klein gegenüber seiner rektifizierten Länge.

Der Schwerpunkt bewegt sich in erster Näherung in Richtung der in ihrer Mittellage (wie skizziert) befindlichen Pendelstange. Sein Weg s hängt von ξ, aber näherungsweise nicht von η ab. Die Größe dieses Weges ist aus Abb. 3 abzulesen:

$$s = \xi \cos\chi\,, \qquad d^2 s/d t^2 = \cos\chi\, d^2\xi/d t^2\,.$$

Die Schwerpunktsbeschleunigung hat einen hauptsächlichen Teil in der mittleren Richtung der Pendelstange. Dieser Teil hat den zeitlichen Mittelwert Null. Nicht aber die zur mittleren Pendelstangenrichtung senkrechte Komponente der Schwerpunktsbeschleunigung, welche durch den kleinen Winkel entsteht, den die Pendelstange in jedem Augenblick mit ihrer mittleren Richtung bildet. Nach Abb. 3 ist die Projektion dieses Winkels auf die durch die mittlere Pendelrichtung gehende, auf der Oszillationsebene senkrecht stehende Ebene:

$$\chi' = \frac{\xi}{c}\sin\chi\,.$$

Und die Projektion des gleichen Winkels auf die durch die mittlere Pendelrichtung und die η-Achse gehende Ebene ist:

$$\varepsilon = \eta/c\,.$$

Abb. 3.

Nennt man Ξ die Komponente der Schwerpunktsbeschleunigung senkrecht zur mittleren Pendelrichtung und zur η-Achse und H die Komponente in Richtung der η-Achse, so ist in der durch die Annahmen gegebenen Näherung, unter Benutzung der vorstehend abgeleiteten Beziehungen:

$$\Xi = -\chi'\frac{d^2 s}{d t^2} = 4\pi^2\frac{n^2}{c}\sin\chi\cos\chi\,(x\cos\omega + y\sin\omega)^2$$

und

$$H = -\varepsilon\frac{d^2 s}{d t^2} = 4\pi^2\frac{n^2}{c}\cos\chi\,(-x\sin\omega + y\cos\omega)\,(x\cos\omega + y\sin\omega)\,.$$

Die zeitlichen Mittelwerte dieser Ausdrücke können gleich hingeschrieben werden, da der zeitliche Mittelwert von x^2 gleich $a^2/2$, der von y^2 gleich $b^2/2$ und derjenige von xy gleich 0 ist.

$$\left.\begin{aligned}\overline{\Xi} &= 2\pi^2\frac{n^2}{c}\sin\chi\cos\chi\,(a^2\cos^2\omega + b^2\sin^2\omega)\\ \overline{H} &= -2\pi^2\frac{n^2}{c}(a^2 - b^2)\sin\omega\cos\omega\cos\chi\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (2).$$

Dies sind die Komponenten des Effektes der Oszillation. Die Resultierende hat die Größe:

$$\left.\begin{aligned}&\sqrt{\overline{\Xi}^2 + \overline{H}^2}\\ &= 2\pi^2\frac{n^2}{c}\cos\chi\sqrt{a^4\cos^2\omega(\sin^2\chi\cos^2\omega + \sin^2\omega) - 2a^2b^2\sin^2\omega\cos^2\omega\cos^2\chi + b^4\sin^2\omega(\sin^2\omega\sin^2\chi + \cos^2\omega)}\\ &= 2\pi^2\frac{n^2}{c}\sqrt{a^4\sin^2\varphi\cos^2\varphi - 2a^2b^2\cos^2\varphi\cos^2\psi + b^4\sin^2\psi\cos^2\psi}\end{aligned}\right\} (3)$$

und die Richtung:

$$\operatorname{tg}\varrho = \frac{\overline{H}}{\overline{\Xi}} = -\frac{a^2 - b^2}{a^2\cos^2\omega + b^2\sin^2\omega}\,\frac{\sin\omega\cos\omega}{\sin\chi} = -\frac{(a^2 - b^2)\cos\varphi\cos\psi}{(a^2\cos^2\varphi + b^2\cos^2\psi)\sqrt{\sin^2\varphi - \cos^2\psi}} \quad (4).$$

Die beiden Komponenten $\overline{\Xi}$ und $\overline{H}$ liegen in der durch den Pendelschwerpunkt senkrecht zur Pendelstange gelegten Ebene, welche zur Bildebene wird, wenn man die in Abb. 2 links oben stehende Projektion um den Winkel $90^0 - \chi$ nach vorne dreht. Das entstehende Bild ist darunter skizziert. Es zeigt den Winkel ϱ in wirklicher Größe, nach Formel (4) berechnet.

Da χ und ω positiv und spitzig sind, ist $\overline{\Xi}$ positiv, während $\overline{H}$ das Vorzeichen von $b - a$ hat. Die Komponente $\overline{\Xi}$ ist also immer zur Oszillationsebene hin gerichtet, und die der Oszillationsebene parallele Komponente $\overline{H}$ bildet mit der positiven Richtung der größeren Ellipsenachse einen spitzen Winkel.

Denkt man sich die Zeit, oder, was auf das gleiche herauskommt, die Oszillation, rückwärts laufend, so wird die Phasenaufeinanderfolge von x und y entgegengesetzt der gemachten Annahme. Anstatt jedoch x und y zu vertauschen, kann man b durch $-b$ ersetzen, um die umgekehrte Bewegung zu beschreiben. An den Komponenten des Effektes ändert das nichts.

2. Physisches Pendel. Bisher war das Pendel als »mathematisches« angenommen, dessen zentrales Trägheitsmoment null ist. Im folgenden werde der Effekt einer linearen Oszillation bei einem »physischen« Pendel berechnet. Dessen zentrales Trägheitsmoment in bezug auf die zur Pendelstange und zur Oszillationsrichtung senkrechte Achse heiße Θ. Diese Achse sei eine Hauptträgheitsachse. Die Oszillation sei wieder: $x = a \sin 2 \pi n t$.

Bei der Berechnung des Effektes für ein physisches Pendel ist zu beachten, daß die Richtung, in der sich der Schwerpunkt in erster Annäherung hin und her bewegt, von der Richtung der Pendelstange verschieden ist, daß die Richtung der mit der Oszillation veränderlichen, vom Oszillationsantriebe auf das Pendel ausgeübten Kraft von beiden genannten Richtungen verschieden ist, und daß die Zentrifugalbeschleunigung nicht vernachlässigt werden darf. Diese ist zwar in ihrem Momentanwert, nicht aber in ihrem zeitlichen Mittelwert klein gegenüber der Schwerpunktsbeschleunigung. Dies ist aus Formel (7) leicht zu berechnen und übrigens schon während der Integration zu ersehen.

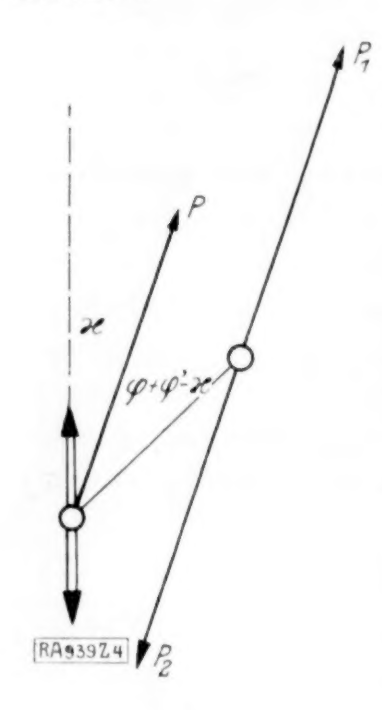


Abb. 4.

Der Oszillationsantrieb übt auf den Aufhängepunkt des Pendels eine nach Größe und Richtung noch unbekannte Kraft aus. Bezeichnet man ihre Größe mit P und den von ihrer Richtung mit der Oszillationsrichtung eingeschlossenen Winkel mit $\varkappa$, so kann man auch das auf das Pendel wirkende Drehmoment ausdrücken. Wie in Abb. 4 angedeutet, kann man eine der Kraft P gleich große und gleich gerichtete Kraft P_1 sowie eine entgegengesetzt gleiche P_2, beide durch den Pendelschwerpunkt gehend, annehmen. Diese Annahme ist willkürlich, ändert aber an dem Kräftesystem nichts. Die Kraft P_1 erteilt dem Pendel eine Translationsbeschleunigung in ihrer Richtung von der Größe P/M; die Kräfte P und P_2 bilden ein Paar von der Größe $Pc \sin(\varphi + \varphi' - \varkappa)$, welches dem Pendel eine Drehbeschleunigung um seinen Schwerpunkt von der Größe

$$\frac{Pc}{\Theta} \sin(\varphi + \varphi' - \varkappa) = \frac{Pc}{M k^2} \sin(\varphi - \varkappa + \varphi')$$

erteilt.

Der Aufhängepunkt erfährt drei Beschleunigungen:

1. die genannte Translationsbeschleunigung P/M in Richtung von P,
2. infolge der genannten Drehbeschleunigung die Beschleunigung

$$\frac{c^2}{\varkappa^2} \frac{P}{M} \sin(\varphi - \varkappa + \varphi')$$

in Richtung senkrecht zur Pendelstange,

3. infolge der Drehung die Zentrifugalbeschleunigung $c \left(\frac{d\varphi'}{dt}\right)^2$ in Richtung der Pendelstange.

Diese drei Beschleunigungen zusammen müssen die dem Aufhängepunkt vorgeschriebene Bewegung ergeben. Ihre Projektionen auf die Richtung senkrecht zur Oszillationsachse müssen die Summe 0 haben, während ihre Komponenten in Richtung der Oszillationsachse die Summe $\frac{d^2x}{dt^2} = -4\pi^2 n^2 a \sin 2\pi n t$ haben müssen. Diese zwei Bedingungen lauten:

$$\frac{P}{M} \sin \varkappa - \frac{P}{M} \frac{c^2}{k^2} \sin(\varphi - \varkappa + \varphi') \cos(\varphi + \varphi') + c \left(\frac{d\varphi'}{dt}\right)^2 \sin(\varphi + \varphi') = 0,$$

$$\frac{P}{M} \cos \varkappa + \frac{P}{M} \frac{c^2}{k^2} \sin(\varphi - \varkappa + \varphi') \sin(\varphi + \varphi') + c \left(\frac{d\varphi'}{dt}\right)^2 \cos(\varphi + \varphi') = \frac{d^2x}{dt^2}.$$

Sie stellen zwei Gleichungen mit den Unbekannten P und $\varkappa$ dar. Betrachtet man statt deren die Komponenten $P \sin \varkappa$ und $P \cos \varkappa$ als die Unbekannten, so kann man die Gleichungen nach letzteren ordnen:

$$\frac{P}{M}\sin\varkappa\left(\frac{k^2}{c^2}+\cos^2(\varphi+\varphi')\right)-\frac{P}{M}\cos\varkappa\sin(\varphi+\varphi')\cos(\varphi+\varphi')+\frac{k^2}{c}\left(\frac{d\varphi'}{dt}\right)^2\sin(\varphi+\varphi')=0$$

$$-\frac{P}{M}\sin\varkappa\sin(\varphi+\varphi')\cos(\varphi+\varphi')+\frac{P}{M}\cos\varkappa\left(\frac{k^2}{c^2}+\sin^2(\varphi+\varphi')\right)+\frac{k^2}{c}\left(\frac{d\varphi'}{dt}\right)^2\cos(\varphi+\varphi')-\frac{k^2}{c^2}\frac{d^2x}{dt^2}=0$$

und erhält daraus:

$$\left.\begin{aligned}\frac{P}{M}\sin\varkappa&=\left[\frac{\cos(\varphi+\varphi')}{1+k^2/c^2}\frac{d^2x}{dt^2}-c\left(\frac{d\varphi'}{dt}\right)^2\right]\sin(\varphi+\varphi')\\ \frac{P}{M}\cos\varkappa&=\frac{k^2/c^2+\cos^2(\varphi+\varphi')}{1+k^2/c^2}\frac{d^2x}{dt^2}-c\left(\frac{d\varphi'}{dt}\right)^2\cos(\varphi+\varphi')\end{aligned}\right\}\quad\ldots\quad(5).$$

Das sind die Komponenten der Schwerpunktsbeschleunigung, und zwar sind es Momentanwerte. Die in diesem Kapitel bisher angeschriebenen Formeln gelten genau. Um daraus ein einfaches Ergebnis abzuleiten, sind **einschränkende Annahmen** nötig: Zunächst sei a klein gegenüber c. Ferner passiere der Schwerpunkt bei der Oszillation seine Mittellage unter einer solchen Richtung σ gegenüber der Oszillationsachse, daß in diesem Augenblick die antreibende Kraft P verschwindet. Aus dieser Annahme ergeben sich zwei Folgerungen: Die Bewegung des Schwerpunktes erfolgt in erster Näherung geradlinig; und der Schwerpunkt ist nach genau einer Oszillationsperiode um eine im Vergleiche zu 2a kleine Strecke verschoben.

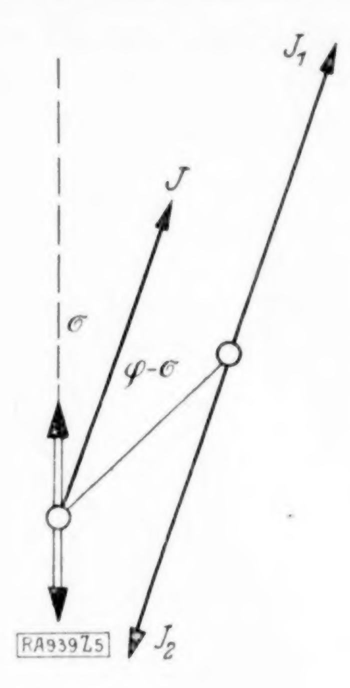


Abb. 5.

Der Winkel σ ergibt sich definitionsgemäß aus der Annahme: Das System befinde sich in Ruhe und zwar in seiner mittleren Stellung $x = 0$. Nun werde es durch einen Stoß des Oszillationsantriebes plötzlich in Gang gebracht. Dabei erhalte der Aufhängepunkt den Impuls J, der mit der Oszillationsrichtung den Winkel σ einschließt, Abb. 5. Wie oben sei ein gleich großer und gleich gerichteter Impuls J_1 sowie ein entgegengesetzt gleicher J_2 im Schwerpunkte angreifend angenommen. Bei dem Stoß erhält der Schwerpunkt von dem Impuls J_1 die Geschwindigkeit J/M in Richtung von J und außerdem das Pendel von dem Impulspaar J und J_2 die Drehgeschwindigkeit $\frac{Jc}{\Theta}\sin(\varphi-\sigma)$. Die aus diesen beiden resultierende Bewegung des Aufhängepunktes muß die Richtung der Oszillation haben, d. h. die Geschwindigkeitskomponente senkrecht zu dieser Richtung muß verschwinden.

$$\frac{J}{M}\sin\sigma-\frac{J}{\Theta}c\sin(\varphi-\sigma)\cdot c\cdot\cos\varphi=0$$

und daraus:

$$\operatorname{tang}\sigma=\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{k^2/c^2+\cos^2\varphi}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(6).$$

Diese Formel braucht man für die weitere Rechnung auch in den Gestalten:

$$\sin\sigma=\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{(1+2k^2/c^2)\cos^2\varphi+k^4/c^4}}\qquad\cos\sigma=\frac{k^2/c^2+\cos^2\varphi}{\sqrt{(1+2k^2/c^2)\cos^2\varphi+k^4/c^4}}$$

$$\sin(\varphi-\sigma)=\frac{k^2/c^2\sin\varphi}{\sqrt{(1+2k^2/c^2)\cos^2\varphi+k^4/c^4}}\qquad\cos(\varphi-\sigma)=\frac{(1+k^2/c^2)\cos\varphi}{\sqrt{(1+2k^2/c^2)\cos^2\varphi+k^4/c^4}}$$

Für den in erster Näherung geradlinigen Weg s des Schwerpunktes ergeben sich gemäß Abb. 6 aus der Konstanz der Pendellänge c die beiden Beziehungen:

$$c\sin\varphi+s\sin\sigma=c\sin(\varphi+\varphi')\qquad c\cos\varphi+s\cos\sigma=x+c\cos(\varphi+\varphi').$$

Eliminiert man das nicht weiter interessierende s, so erhält man:

$$\varphi'=-(\varphi-\sigma)+\operatorname{arc\,sin}\left(\sin(\varphi-\sigma)+\frac{x}{c}\sin\sigma\right).$$

Da mit a auch x klein gegenüber c ist, kann man diese Formel vereinfachen. Sie geht dann über in **näherungsweise**:

$$\varphi'=\frac{x}{c}\frac{\sin\sigma}{\cos(\varphi-\sigma)}=\frac{x}{c}\frac{\sin\varphi}{1+k^2/c^2}\quad\ldots\ldots\ldots\quad(7).$$

Die letztere Form mit Hilfe von (6). Da proportional x/c, ist auch φ' eine kleine Größe. Setzt man sie in (5) ein, so enthalten diese Ausdrücke keine Unbekannten mehr:

$$\frac{P}{M}\sin\varkappa = -\frac{4\pi^2 n^2 a}{1+k^2/c^2}\Big[\sin\varphi\cos\varphi\sin 2\pi n t + \frac{a}{c}\,\frac{\sin\varphi}{1+k^2/c^2}\Big((\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)\sin^2 2\pi n t+\sin^2\varphi\cos^2 2\pi n t\Big)\Big]$$

$$\frac{P}{M}\cos\varkappa = \frac{4\pi^2 n^2 a}{1+k^2/c^2}\Big[-\Big(\frac{k^2}{c^2}+\cos^2\varphi\Big)\sin 2\pi n t+\frac{a}{c}\,\frac{\sin^2\varphi\cos\varphi}{1+k^2/c^2}(2\sin^2 2\pi n t-\cos^2 2\pi n t)\Big].$$

Von diesen beiden Beschleunigungskomponenten sind nun die zeitlichen Mittelwerte zu bilden. Dazu liefern nur die dem Quadrate von $\sin 2\pi n t$ oder $\cos 2\pi n t$ proportionalen Terme von 0 verschiedene Beiträge. Da der zeitliche Mittelwert dieser Quadrate gleich $1/2$ ist, ergeben sich die zeitlichen Mittelwerte zu:

$$\overline{\frac{P}{M}\sin\varkappa} = -2\pi^2 n^2\frac{a^2}{c}\,\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{(1+k^2/c^2)^2}\cos\varphi\,,\qquad \overline{\frac{P}{M}\cos\varkappa} = 2\pi^2 n^2\frac{a^2}{c}\,\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{(1+k^2/c^2)^2}\sin\varphi \quad (8).$$

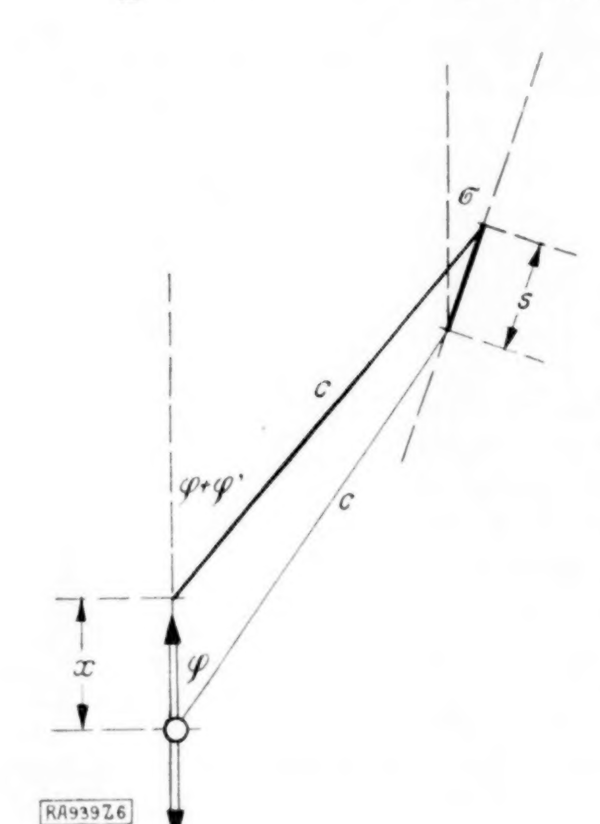


Abb. 6.

Dies sind die Komponenten des zu berechnenden Effektes. Der Quotient dieser beiden Komponenten ist:

$$\frac{\overline{\frac{P}{M}\sin\varkappa}}{\overline{\frac{P}{M}\cos\varkappa}} = -\frac{1}{\operatorname{tg}\varphi} \quad . \quad . \quad . \quad (9).$$

Die Beschleunigung hat also die Richtung senkrecht zur Pendelstange. Dies muß, wie in der Einleitung erwähnt, schon aus geometrischen Gründen der Fall sein. Das Ergebnis dient als Rechenprobe. Ferner zeigt es: Die Beschleunigung ist immer gegen die Oszillationsachse hin gerichtet. Sie hat die Größe:

$$\overline{\frac{P}{M}} = \pi^2 n^2\frac{a^2}{c}\,\frac{\sin 2\varphi}{(1+k^2/c^2)^2} \quad . \quad . \quad . \quad (10).$$

Für den Sonderfall $k=0$ wird diese Formel zu der schon in der Einleitung aufgestellten (1). Für den anderen Sonderfall, daß φ klein ist, wird sie, übereinstimmend mit der Formel von Stephenson, zu:

$$\overline{\frac{P}{M}} = 2\pi^2 n^2\frac{a^2}{c}\,\frac{\varphi}{(1+k^2/c^2)^2}$$

Die Berechnung des Effektes einer elliptischen Oszillation für ein Pendel mit verschiedenen Trägheitsmomenten in den verschiedenen Richtungen wäre verwickelter wegen der größeren Zahl von richtunganzeigenden Veränderlichen. Einfach ist jedoch der Sonderfall der Symmetrie, d. h. der Fall, daß $\omega=0$ (bzw. $\omega=\pi/2$) und das Trägheitsmoment in bezug auf eine zur Oszillationsebene parallele, zur Pendelstange senkrechte Achse Hauptträgheitsmoment ist. In diesem Falle, welcher den Sonderfall der **zirkularen Oszillation** ($a=b$) in sich einschließt, verschwindet in den Formeln (2) die Komponente $\overline{H}$, während die den ganzen Effekt darstellende Komponente $\overline{\Xi}$ wird:

$$\overline{\Xi} = \pi^2 n^2\frac{a^2}{c}\sin 2\chi.$$

Darin stellt a diejenige Ellipsenhalbachse dar, mit der die Projektion der Pendelstange auf die Oszillationsebene zusammenfällt. Der Effekt ist ebenso, als wenn in der Richtung der anderen Ellipsenhalbachse eine beliebig große, zum Beispiel überhaupt keine Oszillation stattfände. Auf die Größe von b kommt es nicht an und daher auch nicht auf die Größe der beiden anderen Haupt-Trägheitsmomente. Die für lineare Oszillation und physisches Pendel aufgestellte Formel (10) gilt daher im Falle einer vollkommenen, d. h. sich auch auf die Orientierung des Trägheitsellipsoides erstreckenden Symmetrie

auch für elliptische und insbesondere für zirkulare Oszillation. Für diese Fälle ist der Effekt gleich:

$$\Xi = \pi^2 n^2 \frac{a^2}{c} \frac{\sin 2\chi}{(1 + k^2/c^2)^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (11).$$

Bisher wurde die Oszillation des Aufhängepunktes als eine harmonische Bewegung angenommen. Die Rechnung ist analog durchführbar für den Fall einer linearen Oszillation, bei welcher der Aufhängepunkt sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegt, welche sich an den Punkten $x = \pm a$ plötzlich umkehrt. Für diese Art von Oszillation ergibt sich der Effekt zu:

$$8\, n^2 \frac{a^2}{c} \frac{\sin 2\varphi}{(1 + k^2/c^2)^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (12).$$

Das ist Formel (10), in welcher π^2 durch 8 ersetzt ist. Der Effekt ist also bei der eckigen Bewegungsform etwas geringer als bei einer harmonischen. Daß die Impulsübertragung bei der eckigen Bewegungsform auf die wirkungsvollsten Augenblicke, nämlich die der Umkehr, konzentriert ist, wird mehr als ausgeglichen durch die Zeitersparnis bei dieser Bewegung im Vergleich zur harmonischen.

II. Gleichgewichtslagen.

1. Bei linearer Oszillation. Wenn keine Schwerkraft wirkt, hat des Pendel zwei stabile Gleichgewichtslagen in der Oszillationsrichtung und falls es kardanisch aufgehängt ist, unendlich viele labile in den Richtungen senkrecht dazu. Nun wirke auf das Pendel noch eine konstante äußere Kraft, die man, ohne die Allgemeinheit aufzugeben, als Erdanziehung ansprechen mag. Sie heiße Mg und bilde mit der Oszillationsrichtung den Winkel ϑ. Aus Symmetriegründen können Gleichgewichtslagen nur in der durch Oszillations- und Gravitationsrichtung bestimmten Ebene liegen. Im allgemeinen, d. h. wenn eine äußere Kraft vorhanden und ihre Richtung von der Oszillationsrichtung verschieden ist, bestehen von den genannten unendlich vielen labilen Gleichgewichtslagen nur zwei.

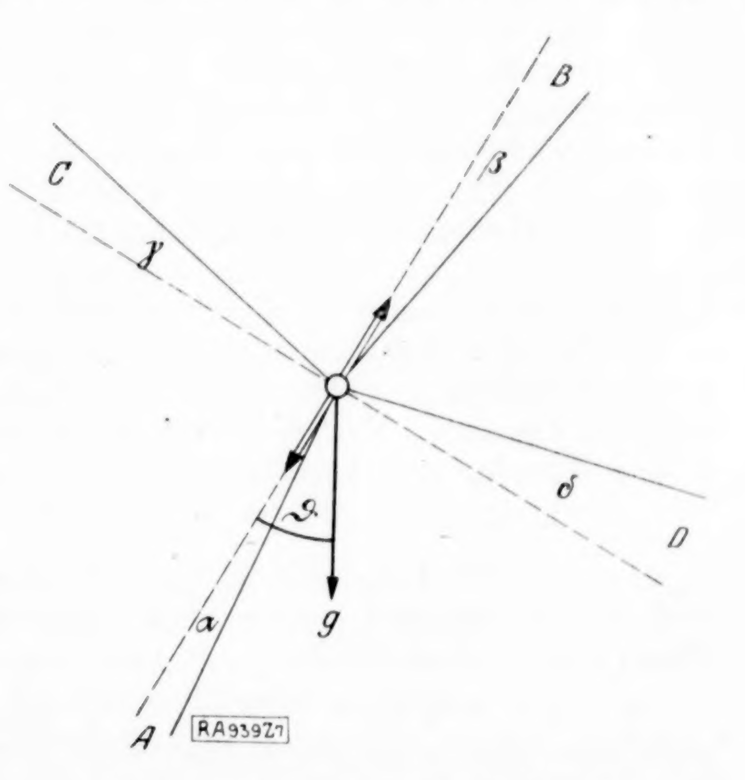


Abb. 7. Lineare Oszillation, $\vartheta = 30^0$.
— — — Gleichgewichtslagen bei $K = \infty$,
——— » » $K = 2$.

Ist die Gravitation verschwindend schwach, so liegen die Gleichgewichtslagen wie in Abb. 7 punktiert gezeichnet. Von den stabilen heiße die schräg nach unten liegende A, die schräg nach oben liegende B, von den labilen die schräg nach oben C und die schräg nach unten D. Das Gewicht des Pendels wird die Wirkung haben, die Gleichgewichtslage A um einen Winkel α zu senken, der sich aus der Beziehung ergibt:

$$g \sin(\vartheta - \alpha) = \pi^2 n^2 \frac{a^2}{c} \frac{\sin 2\alpha}{(1 + k^2/c^2)^2}.$$

Wie man rechnen möge, erhält man eine Gleichung vierten Grades. Bei kräftiger Oszillation ist der Winkel α mäßig groß. Das erlaubt ein einfaches numerisches Rechnungsverfahren anzuwenden.

Setzt man, um die Schreibung zu vereinfachen:

$$K = \frac{\pi^2}{(1 + k^2/c^2)^2} \frac{n^2 a^2}{c g} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (13),$$

so kann man vorstehende Beziehung so schreiben:

$$\sin 2\alpha = \frac{1}{K} \sin(\vartheta - \alpha) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (14\,a).$$

Die andere stabile Gleichgewichtslage B wird sich infolge der Schwere ebenfalls senken, und zwar um einen Winkel β, für den sich ergibt:

$$\sin 2\beta = \frac{1}{K}\sin(\vartheta+\beta) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14\,\mathrm{b}).$$

Die beiden labilen Gleichgewichtslagen werden sich infolge der Schwerkraft heben, und zwar um den Winkel γ bzw. δ, für den sich ergibt:

$$\sin 2\gamma = \frac{1}{K}\cos(\vartheta+\gamma) \quad . \quad . \quad . \quad (14\,\mathrm{c}) \qquad \sin 2\delta = \frac{1}{k}\cos(\vartheta-\delta) \quad . \quad . \quad (14\,\mathrm{d}).$$

Aus den Formeln (14) sind die Gleichgewichtslagen durch Iteration zu berechnen. Diese konvergiert um so stärker, je kräftiger die Oszillation ist. Zweimalige Rechnung wird oft genügen. Beginnt man die Rechnung mit $\alpha=0$ bzw. $\beta=0$ usw., so sieht man, daß in erster Näherung $\alpha=\beta$ und $\gamma=\delta$ ist.

Um die stabilen Gleichgewichtslagen kann das Pendel schwingen. Für Schwingungen in der Vertikalebene ergibt die übliche Rechnung die Frequenzen:

$$N_A = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{c}\,\frac{2K\cos 2\alpha+\cos(\vartheta-\alpha)}{1+k^2/c^2}} \quad (15\,\mathrm{a}) \qquad N_B = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{c}\,\frac{2K\cos 2\beta-\cos(\vartheta+\beta)}{1+k^2/c^2}} \quad (15\,\mathrm{b})$$

Bei einigermaßen starker Oszillation, jedenfalls im ganzen Gebiete von vier Gleichgewichtslagen, sind diese Frequenzen N wesentlich kleiner als die Oszillationsfrequenz n.

Ist die Oszillation sehr kräftig, also K groß, so sind die Winkel α, β, γ und δ klein. Läßt man den Winkel ϑ konstant und vermindert die Oszillationsstärke, so nehmen die Winkel α und γ zu, sie gehen aber nicht über die Werte $\alpha=\vartheta$ bzw. $\gamma=90^0-\vartheta$ hinaus, sondern erreichen sie bei $K=0$. Bei verschwindender Oszillationsstärke gehen die Gleichgewichtslagen A und C in die Vertikale über. Sie existieren immer.

Die beiden anderen Gleichgewichtslagen, die stabile B und die labile D, verhalten sich bei großen Werten von K ebenso wie die zuerst besprochenen. Bei allmählicher Verminderung von K werden auch die Winkel β und δ größer, so daß sich die beiden Gleichgewichtslagen B und D von beiden Seiten her immer mehr nähern. Bei dem Werte $K=K_0$ stoßen sie an der Stelle $\beta=\beta_0$ bzw. $\delta=90^0-\beta_0$ zusammen. Dabei wird die Geschwindigkeit ihrer Annäherung, d. h. die Größe $d\beta/dK$ bezw. $d\delta/dK$ zuletzt unendlich. Bei weiterer Verminderung von K, also Unterschreitung des Wertes K_0, hören die Gleichgewichtslagen B und D auf zu existieren.

Für die Grenzwerte K_0 und β_0 ergibt sich außer der auch für sie geltenden Gleichgewichtsbedingung (14b) die Beziehung, daß die Diskriminante in Formel (15b), also auch die Frequenz N_B, verschwindet. Diese beiden Gleichungen lauten:

$$K_0 \sin 2\beta_0 = \sin(\vartheta+\beta_0),$$
$$2K_0\cos 2\beta_0 = \cos(\vartheta+\beta_0).$$

Aus ihnen läßt sich entweder K_0 oder β_0 eliminieren. Man erhält:

$$\operatorname{tang}^3\beta_0 = \operatorname{tang}\vartheta \quad . \quad . \quad (16),$$

was durch Abb. 8 graphisch dargestellt wird.

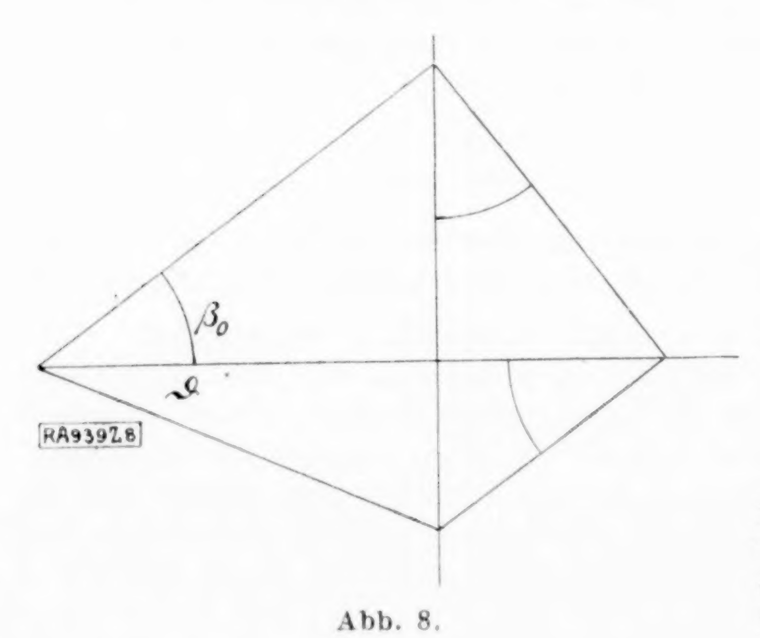


Abb. 8.

$\operatorname{tang}\beta_0 = \sqrt[3]{\operatorname{tang}\vartheta}$.

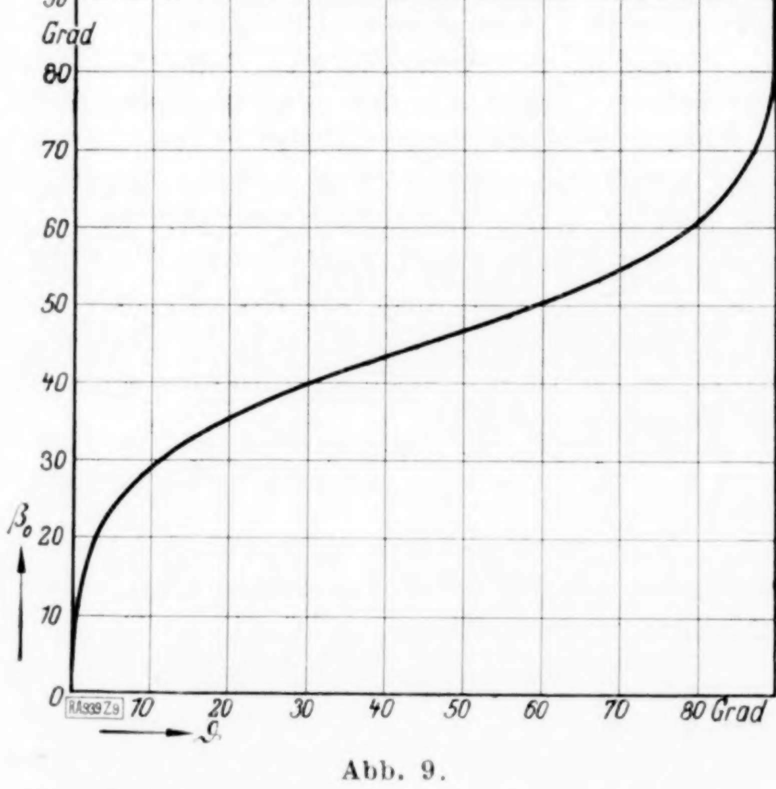


Abb. 9.

Ist die Oszillationsrichtung um den Winkel ϑ gegen die Vertikale geneigt, so fallen die Gleichgewichtslagen B und D in der Richtung $\varphi=\beta_0$ zusammen, wenn $K=K_0$ ist, und existieren nicht, wenn K kleiner als dieser Wert ist.

Die Konstruktion gestattet zu verschiedenen Werten von β_0 die zugehörigen von ϑ leicht zu ermitteln und daraus die Kurve Abb. 9 aufzutragen, der für ein gegebenes ϑ der Verschwindungswinkel β_0 entnommen werden kann. Ferner

$$\left.\begin{aligned} K_0 &= {}^1/_2\,[(\sin\vartheta)^{2/3} + (\cos\vartheta)^{2/3}]^{3/2}\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\text{sive:}\\ \sin 2\vartheta &= \frac{1}{K_0}\left(\frac{4K_0^2-1}{3}\right)^{3/2} \quad\text{und}\quad \cos 2\vartheta = \frac{8K_0^2+1}{3K_0}\sqrt{\frac{1-K_0^2}{3}} \end{aligned}\right\}\;(17).$$

Aus letzteren beiden Formeln, noch besser aber aus den im Verlaufe der Elimination zunächst auftretenden beiden:

$$\sin 2\beta_0 = \frac{1}{K_0}\sqrt{\frac{4K_0^2-1}{3}} \quad\text{und}\quad \cos 2\beta_0 = \frac{1}{K_0}\sqrt{\frac{1-K_0^2}{3}}$$

ist zu ersehen, daß ein reeller Wert von β_0 nur existieren kann, wenn

$${}^1/_2 \leq K_0 \leq 1.$$

Das ist so zu deuten: Ist $K_0 < {}^1/_2$, so existieren immer, d. h. bei jedem ϑ, nur zwei Gleichgewichtslagen. Ist $K_0 > 1$, so existieren jedenfalls deren vier. Nur wenn K_0 zwischen diesen beiden Grenzen liegt, hängt es vom Werte von ϑ ab, ob es zwei oder vier Gleichgewichtslagen gibt. Den Zusammenhang (17) zeigt Abb. 10. Die Kurve trennt die Wertpaare K, ϑ, bei denen es vier Gleichgewichtslagen gibt, von solchen, bei denen es zwei gibt. Die der Kurve selbst angehörenden Punkte stellen Wertpaare K, ϑ dar, bei denen es drei Gleichgewichtslagen gibt, von denen die kritische indifferent ist.

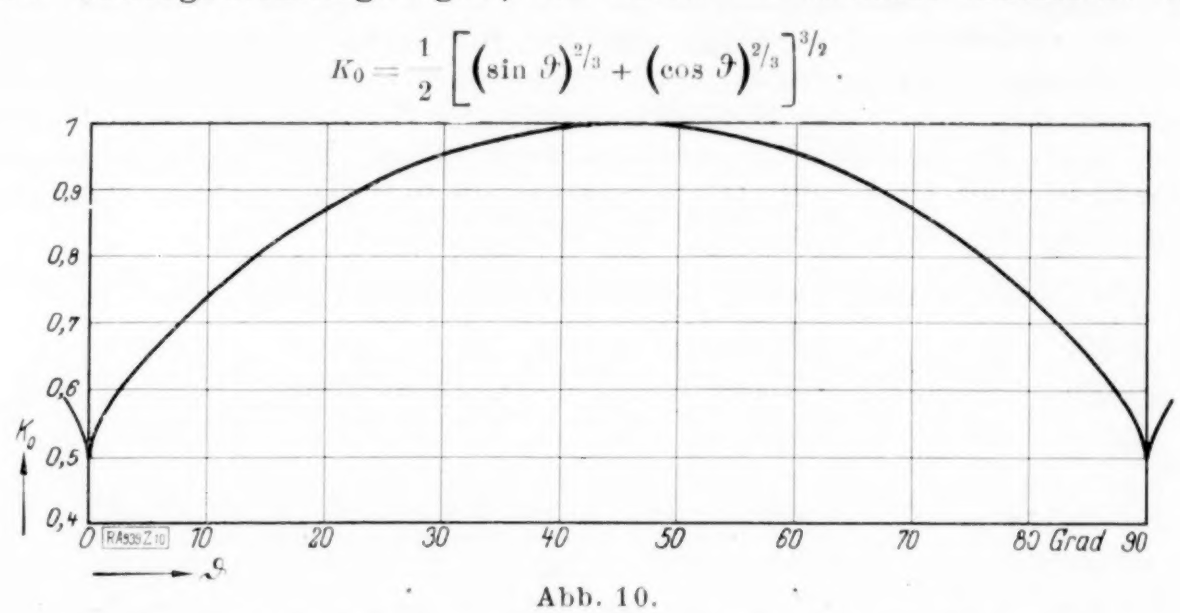


Abb. 10.

Punkte unterhalb der Kurve stellen Wertepaare K_0, ϑ mit zwei Gleichgewichtslagen dar, Punkte oberhalb der Kurve solche mit vieren.

Spezialfälle. Bei vertikaler Oszillation ist die stabile Gleichgewichtslage A immer vertikal nach unten, die andere stabile, B vertikal nach oben gerichtet, während die beiden labilen C und D symmetrisch schräg nach oben liegen. Diese beiden können, wie oben angedeutet, in einer beliebigen Vertikalebene liegen; in diesem Falle gibt es unendlich viele labile Gleichgewichtslagen, die auf einem Rotationskegel liegen und gegen seitliche Verschiebungen indifferent sind. Da auch $\beta_0 = 0$ wird, sind im kritischen Falle $K = K_0$ die Gleichgewichtslagen B, C und D zu einer einzigen indifferenten, vertikal nach oben liegenden vereinigt. Diese bleibt als labile neben der stabilen A übrig, wenn K den Wert K_0 unterschreitet.

Bei horizontaler Oszillation liegen die labilen Gleichgewichtslagen vertikal, und zwar C nach oben und D nach unten, die zwei stabilen zueinander symmetrisch schräg nach unten. Der kritische Fall vereinigt A, B und D nach unten hängend als indifferente Gleichgewichtslage, welche bei $K < K_0$ als stabile übrig bleibt.

Betrachtet man nur diese Sonderfälle, so sieht es aus, als ob genügend starke vertikale Oszillation des Aufhängepunktes die labile Gleichgewichtslage eines Pendels nach oben zu einer stabilen, ebenso starke horizontale Oszillation des Aufhängepunktes die stabile Gleichgewichtslage nach unten zu einer labilen mache.

Der kritische Wert von K ist für beide Fälle der gleiche, nämlich $K_0 = {}^1/_2$. Speziell für das mathematische Pendel, $k = 0$, kann dies auch so geschrieben werden: $2\pi a n = \sqrt{2gc}$, das heißt: Maximale Oszillationsgeschwindigkeit gleich der Fallgeschwindigkeit beim Fall aus einer Höhe gleich der Pendellänge. Um ein Zahlenbeispiel zu bringen: Pendellänge 50 cm, Oszillationsamplitude 5 cm, Oszillationsfrequenz 10 pro Sek.

Erfolgt die Oszillation nicht harmonisch, sondern »eckig«, d. h. mit konstanter Geschwindigkeit des Aufhängepunktes und plötzlicher Umkehr der Geschwindigkeit an den Punkten $x = \pm a$, so ist die Richtung des Effektes wie bei harmonischer Oszillation, seine Größe aber wie in Formel (12) angegeben (vergl. den dortigen Text). Demnach gilt alles über die Gleichgewichtslage bei harmonischer Oszillation Gesagte auch bei eckiger Oszillation mit der einzigen Aenderung, daß in Formel (13) und der vorhergehenden π^2 durch 8 ersetzt wird.

2. Bei zirkularer Oszillation. Fehlt eine äußere Kraft, so gibt es bei gegebener zirkularer Oszillation zwei allseits labile Gleichgewichtslagen, nämlich senkrecht zur Oszillationsebene. Ferner sind alle in der Oszillationsebene liegenden Lagen des Pendels Gleichgewichtslagen, die gegenüber aus der Oszillationsebene herausführenden Störungen stabil, gegenüber Störungen in der Oszillationsebene indifferent sind.

Vergleicht man diese Konstellation von Gleichgewichtslagen mit derjenigen bei einer linearen Oszillation in Richtung senkrecht zur jetzigen Oszillationsebene, so ergibt sich vollkommene Uebereinstimmung, wenn man »stabil« überall durch »labil« ersetzt und umgekehrt. Dabei entspricht die Oszillationsrichtung einer linearen Oszillation der Senkrechten zur Oszillationsebene bei einer zirkularen Oszillation. Die Analogie wird vervollständigt durch die Uebereinstimmung der Formel (11) mit (10). Zirkulale Oszillation des Aufhängepunktes bewirkt einen entgegengesetzt gleich großen Effekt wie eine »entsprechend gerichtete« lineare Oszillation gleicher Frequenz und einer Amplitude gleich dem Radius der zirkularen Oszillation. Daraus ergibt sich die vollkommene Uebereinstimmung der Gleichgewichtsbedingungen, falls man die Bezeichnungen entsprechend wählt.

Bezeichnet man mit ϑ den Winkel zwischen der Richtung der Gravitation genannten äußeren Kraft und der zur Oszillationsebene senkrechten Richtung, benennt man ferner die Gleichgewichtslagen mit A, B, C, D, genau wie bei der linearen Oszillation, jedoch unter Vertauschung der Worte »stabil« und »labil«, so ist

A labil,	schräg nach oben gerichtet,		existiert immer	$0 \leqq \alpha \leqq \vartheta$
B labil,	» » unten	»		$0 \leqq \beta \leqq \beta_0$
C stabil,	» » unten	»	existiert immer	$0 \leqq \gamma \leqq \pi/2 - \vartheta$
D stabil,	» » oben	»		$0 \leqq \delta \leqq \pi/2 - \beta_0$

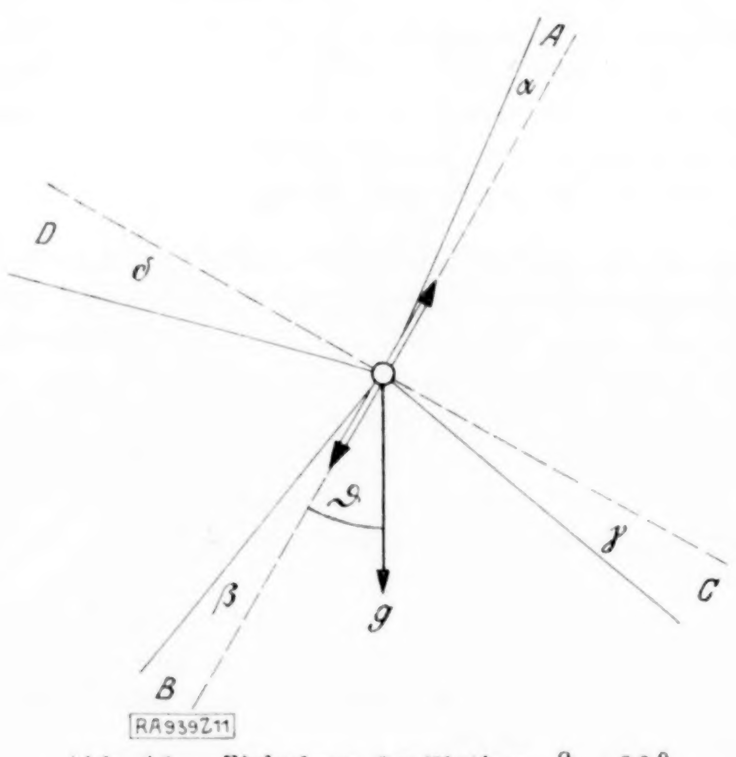


Abb. 11. Zirkulare Oszillation, $\vartheta = 30^0$.
——— Gleichgewichtslagen bei $K = \infty$,
——— » $K = 2$.

Die letzte Spalte lautet wörtlich wie für die lineare Oszillation. Ebenso alles übrige, jedoch unter Vertauschung der Worte »stabil« und »labil« sowie von »oben« und »unten«. Letzteres deshalb, weil in den beiden Fällen die Richtung der den Effekt darstellenden Beschleunigung entgegengesetzt ist, nicht aber die Richtung der Gravitation. Mit Ausnahme der letzteren stimmt die den Verhalt darstellende Abb. 11, in welcher der Doppelpfeil die zur Oszillationsrichtung senkrechte Richtung angibt, genau mit der auf den Kopf gestellten Abb. 7 überein.

Mit den eben genannten zwei Wortvertauschungen gilt alles über die Gleichgewichtslagen bei linearer Oszillation Gesagte auch bei zirkularer Oszillation. Insbesondere auch die Formeln (14a) bis (14d), (16), (17), sowie die Abbildungen 8, 9, 10. Die Formeln (15) für die Schwingungszahlen sind für zirkulare Oszillation zu ersetzen durch:

$$N_C = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{c}\left(2K\cos 2\gamma + \sin(\vartheta + \gamma)\right)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18\,a),$$

$$N_D = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{c}\left(2K\cos 2\delta - \sin(\vartheta - \delta)\right)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18\,b).$$

3. Bei elliptischer Oszillation. Wirkt keine äußere Kraft auf das Pendel, so hat man die Ausdrücke für Ξ und H in (2) gleich 0 zu setzen, um die Wertpaare χ, ω für die Gleichgewichtslagen zu erhalten. Im allgemeinen gibt es deren sechs: Zwei labile senkrecht zur Oszillationsebene gerichtet; zwei stabile in Richtung der großen Achse der Oszillationsellipse; und zwei in Richtung von deren kleiner Achse, welche stabil sind gegenüber Störungen, die das Pendel aus der Oszillationsebene herausführen und labil gegenüber Störungen innerhalb der Oszillationsebene.

Wegen der Symmetrie dieser Gleichgewichtslagen gelten vorstehende Aussagen noch für ein physisches Pendel, wofern auch dessen Trägheitsellipsoid symmetrisch orientiert ist. Das Folgende gilt aber nur für ein mathematisches Pendel.

Auf das Pendel wirke außer der Oszillation eine äußere Kraft, z. B. die Schwerkraft. Ihre Größe, pro Masseneinheit des Pendels, sei g. Sie schließe mit der Oszillationsebene den Winkel χ_g und ihre Projektion auf die Oszillationsebene mit der x-Achse den Winkel ω_g ein. Man kann die Kraft dann in Komponenten nach denjenigen Richtungen zerlegen, welche die in (2) angegebenen Komponenten des Effektes haben. Eine Komponente g_Ξ in Richtung von Ξ, eine Komponente g_H in Richtung von H und eine Komponente g_c in Richtung der Pendelstange. Mittels des cos-Satzes für Kugeldreiecke ergibt sich:

$$\left.\begin{aligned} g_\Xi &= g\,[-\sin\chi_g\cos\chi + \cos\chi_g\sin\chi\cos(\omega_g-\omega)] \\ g_H &= g\cos\chi_g\sin(\omega_g-\omega) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19).$$

Die dritte Komponente g_c von g ist wegen ihrer Richtung unwirksam. Für die weitere Rechnung belanglos, kann sie als Rechenprobe für die eben angeschriebenen Ausdrücke dienen; sie ist $g_c = g\,[\sin\chi_g\sin\chi + \cos\chi_g\cos\chi\cos(\omega_g-\omega)]$.

Die Gleichgewichtsbedingungen lauten:

$$\overline{\Xi} + g_\Xi = 0 \quad \text{und} \quad \overline{H} + g_H = 0.$$

Setzt man die Werte (2) und (19) ein und schreibt man zur Abkürzung:

$$K_a = \frac{\pi^2 n^2 a^2}{c\,g} \quad \text{und} \quad K_b = \frac{\pi^2 n^2 b^2}{c\,g},$$

so lauten die Gleichgewichtsbedingungen:

$$2\sin\chi\cos\chi\,(K_a\cos^2\omega + K_b\sin^2\omega) - \sin\chi_g\cos\chi + \cos\chi_g\sin\chi\cos(\omega_g-\omega) = 0 \quad (20\,\mathrm{a}),$$

$$2\,(K_b - K_a)\sin\omega\cos\omega\cos\chi + \cos\chi_g\sin(\omega_g-\omega) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (20\,\mathrm{b}).$$

Diese Beziehungen liefern die die Gleichgewichtslagen bestimmenden Wertpaare ω, χ in Abhängigkeit von den vier Konstanten K_a, K_b, ω_g, und χ_g. Vermutlich gibt es Gebiete dieser Konstanten mit sechs existierenden Gleichgewichtslagen, dies jedenfalls wenn sowohl K_a als auch K_b größer als eins sind; ferner Gebiete mit vier und solche mit zwei Gleichgewichtslagen, letzteres jedenfalls wenn sowohl K_a als K_b kleiner als $^1/_2$ ist.

Die Gleichgewichtslagen angebenden Wertpaare ω, χ können auch in diesem allgemeineren Falle durch Iteration berechnet werden. Zu diesem Zwecke kann man beispielsweise die Gl. (20a) in die Formen (21a₁) bis (21a₄) und (20b) in die Form (21b) bringen:

$$\sin\chi = \frac{\sin\chi_g\cos\chi}{\cos\chi_g\cos(\omega_g-\omega) + 2\cos\chi\,(K_a\cos^2\omega + K_b\sin^2\omega)} \quad . \quad . \quad . \quad (21\,\mathrm{a}_1).$$

$$\cos\chi = \frac{\cos\chi_g\sin\chi\cos(\omega_g-\omega)}{\sin\chi_g - 2\sin\chi\,(K_a\cos^2\omega + K_b\sin^2\omega)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21\,\mathrm{a}_2).$$

$$\operatorname{tg}\chi = \frac{\sin\chi_g}{\cos\chi_g\cos(\omega_g-\omega) + 2\cos\chi\,(K_a\cos^2\omega + K_b\sin^2\omega)} \quad . \quad . \quad . \quad (21\,\mathrm{a}_3).$$

$$\operatorname{tg}\chi = \frac{\sin\chi_g - 2\sin\chi\,(K_a\cos^3\omega + K_b\sin^2\omega)}{\cos\chi_g\cos(\omega_g-\omega)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21\,\mathrm{a}_4).$$

$$\sin 2\omega = \frac{\cos\chi_g}{K_a - K_b}\,\frac{\sin(\omega_g-\omega)}{\cos\chi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21\mathrm{b}).$$

Zur Rechnung benutzt man eine der Gl. (21a₁) bis (21a₄) und die Gl. (21b). In diese beide Gleichungen setzt man rechts ein Ausgangswertepaar ω, χ ein, erhält daraus verbesserte Werte dieser Unbekannten, die man wieder rechts einsetzt usf. Die Konvergenz des Verfahrens wird verbessert, wenn man die Operation abwechselnd mit der einen und der anderen der beiden Gleichungen vornimmt und dabei immer die »neuesten« Werte von χ und ω rechts einsetzt. Man beginnt die Rechnung zweckmäßig mit (21b),

wenn man $\chi = 0$ als Ausgangswert nimmt, dagegen mit (21a), falls man von $\chi = 90^0$ ausgeht.

Die Gleichgewichtslagen sind bei kräftiger Oszillation (was unter kräftig zu verstehen, erhellt aus dem über die Gleichgewichtslagen bei linearer Oszillation Gesagten) unweit von den Richtungen zu suchen, die sich für den Fall $g = 0$ als Gleichgewichtslagen ergaben. Das heißt: Mit den Wertepaaren ω, χ, welche diese Lagen bezeichnen, wird man die Iteration beginnen. So kann man direkt die Gleichgewichtslagen von bestimmter Stabilitätsart und Existenzart finden. Sucht man beispielsweise die vollkommen stabile, immer existierende Gleichgewichtslage, so geht man von der Richtung der großen Ellipsenachse, welche mit g einen spitzen Winkel einschließt, aus, also von den Werten $\chi = 0$ und $\omega = 0$ bzw. $\omega = \pi$ falls $a > b$, dagegen $\chi = 0$ und $\omega = \pi/2$ bzw. $\omega = 3/2\,\pi$, falls $a < b$ ist.

Bei schwacher Oszillation, also wenn sowohl K_a als K_b wesentlich kleiner als $1/2$ sind, sind die Gleichgewichtslagen unweit von der Gravitationsrichtung zu suchen. Im diesem Falle existieren nur zwei Gleichgewichtslagen. Eine stabile, die man mit den Ausgangswerten $\omega = \omega_g$ und $\chi = \chi_g$ findet, und eine labile, zu der die Ausgangswerte $\omega = -\omega_g$ und $\chi = -\chi_g$ führen werden.

Wenn eine gesuchte Gleichgewichtslage nicht existiert, wird bei ihr die Iterationsrechnung entweder schnell weit weg zu einer anderen Gleichgewichtslage führen oder imaginäre Werte für die Unbekannten ergeben. Wenn jedoch zu Beginn der Iteration ein $\sin\chi$, $\cos\chi$ oder $\sin 2\omega$ ein wenig größer als 1 werden sollte, kann man zunächst versuchen mit dem Werte 1 weiter zu rechnen.

Unter den Gl. ($21a_1$) bis ($21a_4$), welche ja ein und dieselbe Beziehung (20a) in verschiedenen Formen darstellen, wählt man für die Rechnung eine solche, die gute Konvergenz liefert. Die Konvergenz wird meist so gut sein, daß eine genaue Untersuchung, welche von den vier Formen (21a) am besten sei, sich nicht lohnen wird. Bei starker Oszillation wird die Rechnung mit den beiden erstgenannten Formen konvergent; jedenfalls mit ($21a_1$), wenn K_a größer als 1 ist und die Rechnung mit $\omega = 0$ oder π begonnen wird; ebenso mit ($21a_2$), wenn $K_b > 1$ und von $\omega = \pi/2$ oder $3/2\,\pi$ ausgegangen wird. In diesem Zussmmenhange ist zu bedenken, daß der Wert des in den Gl. (21a) vorkommenden eingeklammerten Ausdruckes zwischen K_a und K_b liegt. Bei schwacher Oszillation, jedenfalls wenn sowohl K_a als K_b kleiner als $1/2$ sind, wird die Rechnung mit ($21a_3$) und mit ($21a_4$) konvergieren. In Zweifelsfällen ist es am einfachsten, auszuprobieren. Die ersten zwei Näherungen können ja mit einfachen Rechenmitteln, wie Rechenschieber, ausgeführt werden. 939

Theorie und Versuche über einige Fälle von Spannungsverteilung in ringförmigen Körpern.[1]

Von **GEORG BELL** in Hamburg.

Nachdem in verschiedenen Abhandlungen von W. König[2]) und in zwei unter seiner Leitung entstandenen Dissertationen[3]) eine Reihe von Spannungszuständen in Glaskörpern und Gelatinelösungen theoretisch und experimentell mit Hilfe der künstlichen Doppelbrechung untersucht worden waren, unternahm ich es in vorliegender Arbeit, auf Veranlassung von Herrn W. König, diese Untersuchungen auszudehnen auf zwei besondere Fälle der Beanspruchung durchbohrter zylindrischer Glaskörper. Die durchlochte Glasscheibe wurde Druckkräften unterworfen, die einmal in zwei gegenüberliegenden Punkten ihres äußeren Randes angriffen und zweitens in drei in gleichen Abständen befindlichen Punkten. In den Abb. 1 und 2 sind diese beiden Fälle skizziert und zugleich die zugrunde gelegten Koordinatensysteme eingezeichnet.

[1]) Von der philos. Fakultät der Universität Gießen genehmigte Dr.-Dissertation, Referent Prof. Walter König.

[2]) W. König, Ann. d. Phys. Bd. 4, 1901, S. 1; Bd. 11, 1904, S. 842. Boltzmann-Festschrift, Leipzig 1904, S. 832. Festschrift Elster und Geitel, Braunschweig 1915, S. 368. Ann. d. Phys. Bd. 52, 1917, S. 553.

[3]) H. Steinheil: Dissertation, Gießen 1920. H. Rieth, geb. Marx: Dissertation, Gießen 1926, Ann. d. Phys. IV, Bd. 79, 1926, S. 145.

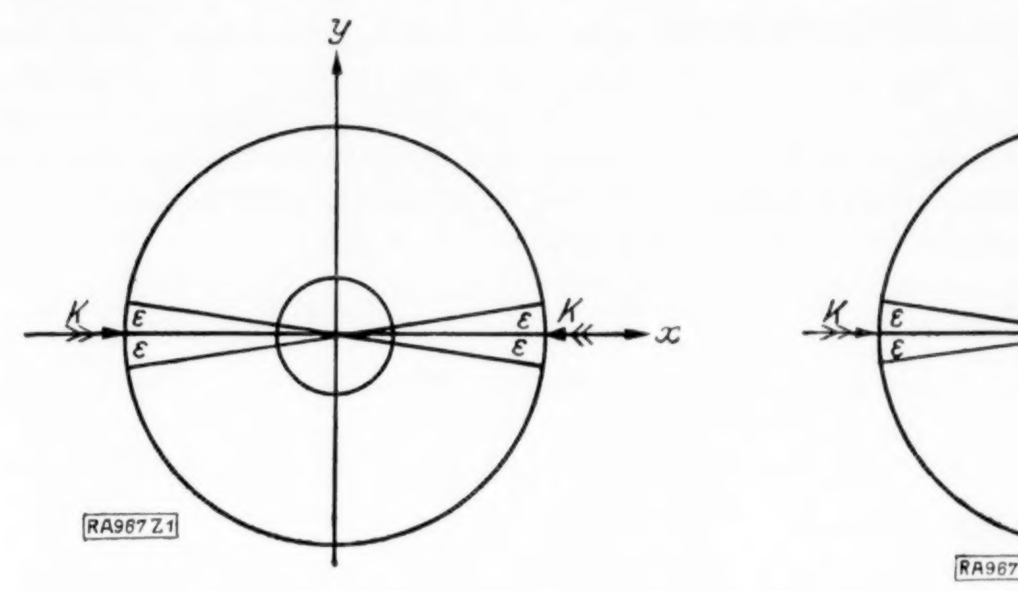


Abb. 1. Ring mit 2 Druckstellen.

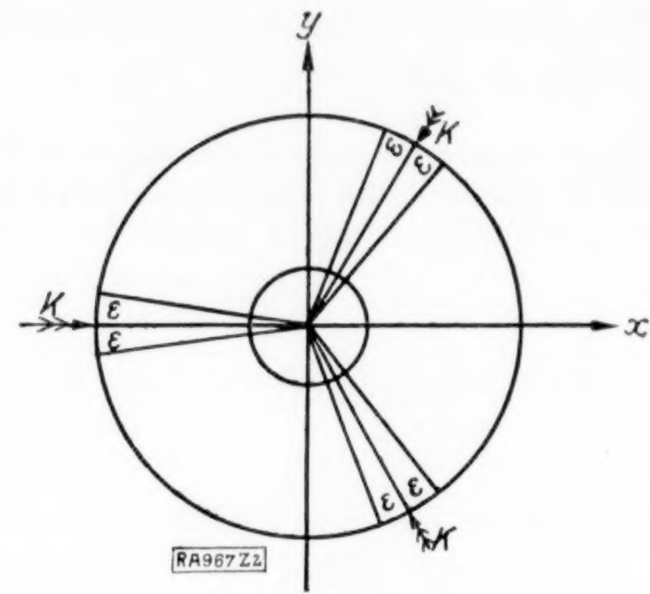


Abb. 2. Ring mit 3 Druckstellen.

A) Theorie der Spannungsverteilung in Kreisringen.

Setzt man einen ebenen Spannungszustand voraus, so handelt es sich darum, eine mit den Randbedingungen verträgliche Airysche Spannungsfunktion zu ermitteln, aus der man dann durch Differentiation die beiden in Richtung der x- bzw. y-Achse wirkenden Normalspannungen t_{11} und t_{22} und die Schubspannung t_{12} herleitet und zwar ist

$$t_{11} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \qquad t_{22} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \qquad t_{12} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (1).$$

Unterscheidet man aber die in Richtung des Radiusvektors fallende Radialspannung σ_r, die dazu senkrechte Ringspannung σ_t und die Schubspannung τ, so hat man in F ausgedrückt:

$$\sigma_r = \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2}, \qquad \sigma_t = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}, \qquad \tau = \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{F}{r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}\right) \quad . \; . \quad (2).$$

Eine für die hier vorliegenden Zwecke brauchbare Form der Spannungsfunktion erhält man nun, wenn man in dem von W. König benutzten Ausdruck für F (Ann. der Phys. 52, Gl. 18, 1917)

$$F = (A_u - B_u r^2)\, r^u \cos u\varphi$$

u die Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen läßt. $u = 0$ sei indessen ausgenommen, und es werde gesetzt

$$A_{-u} = C_u, \qquad B_{-u} = D_u,$$

so daß man schreiben kann

$$F = \sum_{u=1}^{\infty} (A_u r^u - B_u r^{u+2} + C_u r^{-u} - D_u r^{-u+2}) \cos u\varphi .$$

Für $u = 0$ wird F in obigem Ansatz ersichtlich von φ unabhängig. In diesem Falle ist aber eine vollständige Integration der biharmonischen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0$$

möglich und das allgemeine Integral läßt sich etwa in der Form $A_0 \log r - B_0 r^2 + C_0 r^2 \log r$ darstellen. Dieser Ausdruck erfordert für die Anwendung auf den Kreisring eine besondere Betrachtung. Ist E der Elastizitätsmodul, μ die Poissonsche Konstante und e die Dilatation, so stehen die Verschiebungskomponenten u, v, w mit den Normalspannungen in dem Zusammenhang:

$$t_{11} = \frac{E}{1+\mu}\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\mu}{1-2\mu} e\right], \qquad t_{22} = \frac{E}{1+\mu}\left[\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\mu}{1-2\mu} e\right], \qquad t_{33} = \frac{E}{1+\mu}\left[\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\mu}{1-2\mu} e\right].$$

Da ein ebener Spannungszustand angenommen wurde, ist $t_{33} = 0$ zu setzen und aus der letzten der drei Spannungsgleichungen folgt $\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\mu}{1-2\mu} e$. In Verbindung mit der Definitionsgleichung $e = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$ ergibt sich also

$$e = \frac{1-2\mu}{1-\mu}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right).$$

Aus den Grundgleichungen der Elastizitätstheorie

$$\varDelta u + \frac{1}{1-2\mu}\frac{\partial e}{\partial x} = 0, \qquad \varDelta v + \frac{1}{1-2\mu}\frac{\partial e}{\partial y} = 0, \qquad \varDelta w + \frac{1}{1-2\mu}\frac{\partial e}{\partial z} = 0$$

($\varDelta$ = Laplacescher Operator) folgt, daß e und auch die Komponenten des Rotationswinkels ϑ harmonische Funktionen sein müssen. Von ϑ interessiert hier nur die z Komponente, die einfach mit d bezeichnet werde und gegeben ist durch

$$d = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Drückt man mit Hilfe dieses Ausdrucks und des obigen für e $\varDelta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ und $\varDelta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$ in den beiden ersten der elastischen Grundgleichungen durch e und d aus, so ergeben sich die Beziehungen:

$$\frac{2-\mu}{1-2\mu}\frac{\partial e}{\partial x} - 2\frac{\partial d}{\partial y} = 0, \qquad \frac{2-\mu}{1-2\mu}\frac{\partial e}{\partial y} + 2\frac{\partial d}{\partial x} = 0.$$

Enthielte nun die Spannungsfunktion F das Glied $C_0 r^2 \log r$, so wäre nach den Gl. (1) und den Spannungsgleichungen $e =$ konst. $\log r$, so daß sich wegen der eben abgeleiteten Beziehungen zwischen e und d ergäbe $d =$ konst. φ. Da diese Funktion der zu fordernden Stetigkeit der Formänderung im Innern des Kreisringes widerspricht, muß das sie bedingende Glied $C_0 r^2 \log r$ aus der Entwicklung der Spannungsfunktion wegbleiben. Für den von φ unabhängigen Bestandteil bleibt also nur $A_0 \log r - B_0 r^2$ und in Verbindung mit dem Summenansatz wird

$$F = A_0 \log r - B_0 r^2 + \sum_{u=1}^{\infty} (A_u r^u - B_u r^{u+2} + C_u r^{-u} - D_u r^{-u+2}) \cos u\varphi \quad . \quad (3).$$

Man überzeugt sich leicht, daß F in dieser Form zur Darstellung der Spannungsverteilung in den hier behandelten beiden Fällen vollkommen ausreicht. In beiden Fällen ist der gegebene Randdruck $R(\varphi)$ in eine reine cos-Reihe entwickelbar und wenn durch einen Strich über dem Funktionszeichen eine Zugehörigkeit zu dem äußeren Rand $r = r_a$ und durch zwei Striche eine Zugehörigkeit zu dem inneren Rand $r = r_i$ bezeichnet wird, so ist entsprechend den Formeln 2 zu setzen:

$$\bar{\sigma}_r = R(\varphi), \quad \bar{\bar{\sigma}}_r = 0, \quad \bar{\tau} = 0, \quad \bar{\bar{\tau}} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4).$$

Mit diesen Randbedingungen ergeben sich für jedes von φ abhängige Glied der Spannungsfunktion 4 Bestimmungsgleichungen, während für den nur von r abhängigen Bestandteil 2 Bestimmungsgleichungen folgen, da dieser keinen Beitrag zu den Schubkräften τ liefert. Die Konstanten des Ansatzes 3 sind also eindeutig bestimmbar.

Kennt man bereits das Verhalten der Spannungsfunktion an den beiden Begrenzungen, so kann man die Konstantenbestimmung auch in anderer Weise durchführen. Nach den Formeln (2) ist nämlich für irgendeinen Radius $r = \varrho$

$$[\sigma_r]_{r=\varrho} = \frac{1}{\varrho}\left[\frac{\partial F}{\partial r}\right]_{r=\varrho} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\left\{\frac{1}{\varrho^2}[F]_{r=\varrho}\right\},$$

$$[\tau]_{r=\varrho} = \frac{\partial}{\partial \varphi}\left\{\frac{1}{\varrho^2}[F]_{r=\varrho} - \frac{1}{\varrho}\left[\frac{\partial F}{\partial r}\right]_{r=\varrho}\right\}.$$

Diese Spannungen können also leicht ermittelt werden, wenn $[F]_{r=\varrho}$ und $\left[\frac{\partial F}{\partial r}\right]_{r=\varrho}$ bekannt sind. Ist $[\sigma_r]_{r=\varrho}$ eine reine cos-Reihe, so muß auch $[F]_{r=\varrho}$ und $\left[\frac{\partial F}{\partial r}\right]_{r=\varrho}$ diese Eigenschaft zukommen. Man schließt weiter aus den Gleichungen, daß zu F noch eine Konstante hinzuaddiert werden darf, ohne daß die Spannungen geändert würden. Ist $[F]_{r=\varrho} =$ konst. und $\left[\frac{\partial F}{\partial r}\right]_{r=\varrho} = 0$, so müssen $[\sigma_r]_{r=\varrho}$ und $[\tau]_{r=\varrho}$ verschwinden. Die Begrenzung $r = \varrho$ wird schubspannungsfrei, wenn $[F]_{r=\varrho} = \varrho\left[\frac{\partial F}{\partial r}\right]_{r=\varrho} +$ konst. Die Randbedingungen (4) lassen sich demnach auch schreiben

$$\bar{F} = \text{konst.} + \Sigma\, \alpha_u \cos u\varphi, \quad \frac{\partial \bar{F}}{\partial r} = \beta_0 + \Sigma\, \beta_u \cos u\varphi, \quad \bar{\bar{F}} = \text{konst.}, \quad \frac{\partial \bar{\bar{F}}}{\partial r} = 0 \quad . \quad (5).$$

Die beiden letzten Bedingungen bringen zum Ausdruck, daß der innere Rand keiner Einwirkung äußerer Kräfte unterliegt, und wenn in den ersten Gleichungen $\alpha_u = r_a \cdot \beta_u$ ge-

setzt wird, verschwindet auf dem äußeren Rand die Schubspannung. Von dieser Vereinfachung werde jedoch zunächst abgesehen. Unterwirft man F in dem Ansatz (3) den Randbedingungen (5), so ergibt sich

$$F = -\frac{\beta_0 q^2}{1-q^2}\log r + \frac{\beta_0 r^2}{2(1-q^2)} + \sum_{u=1}^{\infty}\left[A_u r^u - B_u r^{u+2} + C_u r^{-u} - D_u r^{-u+2}\right]\cos u\varphi \quad . \quad (6),$$

wobei

$$\left.\begin{aligned}
A_u &= \frac{\alpha_u[(u+2)(1-q^{2u}) + u^2 q^{2u}(1-q^2)] - \beta_u[(1-q^{2u}) - u q^{2u}(1-q^2)]}{2[(1-q^{2u})^2 - u^2 q^{2u-2}(1-q^2)^2]}\\
B_u &= \frac{\alpha_u[u(1+q^{2u}-2q^{2u-2}) + u^2 q^{2u-2}(1-q^2)] - \beta_u[(1-q^{2u}) - u q^{2n-2}(1-q^2)]}{2[(1-q^{2u})^2 - u^2 q^{2u-2}(1-q^2)^2]}\\
C_u &= \frac{\alpha_u[(u-2)(1-q^{2u}) + u^2(1-q^2)] + \beta_u[(1-q^{2u}) - u(1-q^2)]}{2[(1-q^{2u})^2 - u^2 q^{2u-2}(1-q^2)^2]}\, q^{2u}\\
D_u &= \frac{\alpha_u[u(2-q^2-q^{2u+2}) + u^2(1-q^2)] + \beta_u[(1-q^{2u})q^2 - u(1-q^2)]}{2[(1-q^{2u})^2 - u^2 q^{2u-2}(1-q^2)^2]}\, q^{2u-2}
\end{aligned}\right\} \quad (7),$$

wenn gleichzeitig $r_a = 1$ und $r_i = q$ gesetzt wurde.

Ist der äußere Rand schubspannungsfrei, so vereinfachen sich die Konstanten etwas, da dann $\alpha_u = \beta_u$ ist. Nach der genannten Arbeit von H. Rieth[1]) heißt nun die Spannungsfunktion für den Fall, daß die Vollscheibe in zwei gegenüberliegenden Punkten ihres Randes an den Stellen $\varphi = 0$ und $\varphi = \pm\pi$ über dem Winkelbereich 2ε dem Drucke k ausgesetzt wird:

$$F = \frac{2k\varepsilon}{2\pi}r^2 - \sum_{u=1}^{\infty}\left[\frac{2k\varepsilon}{\pi}\frac{\sin 2u\varepsilon}{2u\varepsilon}\frac{r^{2u}}{2u-1} - \frac{2k\varepsilon}{\pi}\frac{\sin 2u\varepsilon}{2u\varepsilon}\frac{r^{2u+2}}{2u+1}\right]\cos 2u\varphi .$$

Dabei wurde der Begrenzungsradius zu $r = 1$ angenommen. Setzt man nun $\frac{F\pi}{2k\varepsilon} = G_1$ und nimmt man an, daß die Druckstellen punktförmig sind ($\varepsilon \to 0$), so wird

$$G_1 = \frac{r^2}{2} - \sum_{u=1}^{\infty}\left[\frac{r^{2u}}{2u-1} - \frac{r^{2u+2}}{2u+1}\right]\cos 2u\varphi \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8).$$

In G_1 haben wir nun eine Funktion, die mit G_1 und $\frac{\partial G_1}{\partial r}$ an dem Rande $r = 1$ dieselben Werte annimmt, wie die hier zunächst gesuchte Spannungsfunktion für das entsprechende Problem des Kreisringes. Die Ausrechnung zeigt, daß man, um diese Funktion zu erhalten, in den Gl. (6) und (7) nur zu setzen hätte

$$\beta_0 = 1, \qquad \alpha_{2u} = \beta_{2u} = -\frac{2}{4u^2-1}, \qquad \alpha_{2u-1} = \beta_{2u-1} = 0.$$

Die so gefundenen Konstanten A_u, B_u, C_u, D_u lassen jedoch erkennen, daß die Funktion F am besten konvergiert, wenn $q = 0$ ist, also im Falle der Vollscheibe. In diesem günstigsten Falle geht die Spannungsfunktion in die durch Gl. (8) dargestellte Funktion G_1 über; aber selbst dann sind infolge der schlechten Konvergenz die Spannungen durchaus nicht für jeden Scheibenpunkt berechenbar.

Um diesen Schwierigkeiten zu entgehen, wurde nach dem Vorgang von Herrn K. Wieghardt, der sich in einer Arbeit[2]) mit dem ersten der hier vorliegenden Probleme beschäftigt, zur Aufstellung der Spannungsfunktion ein anderer Weg eingeschlagen. Bei näherer Betrachtung zerfällt die Spannungsfunktion des Kreisringes in der Form der Gl. (3) in zwei Bestandteile

$$f_1 = -B_0 r^2 + \Sigma\,(A_u r^u - B_u r^{u+2})\cos u\varphi$$

und

$$f_2 = A_0 \log r + \Sigma\,(C_u r^{-u} - D_u r^{-u+2})\cos u\varphi .$$

[1]) H. Rieth a. g. O. Gl. (1) und (27). In Gl. (27) liegt ein Druckfehler vor; es muß heißen $B_0 = -\frac{k\varepsilon}{\pi}$ statt $B_0 = -\frac{2k\varepsilon}{\pi}$.

[2]) K. Wieghardt, Sitz. Ber. der Ak. der Wissenschaften Wien, math.-naturw. Klasse Abt. 2a, Bd. 124, S. 1119, 1915.

Dabei ist f_1 eine Spannungsfunktion der Vollscheibe, während sich f_2 leicht als eine solche der gelochten, unendlichen Ebene erweist. Das Wieghardtsche Verfahren besteht nun darin, daß man zunächst eine Funktion f_1 den am äußeren Rand gegebenen Druckkräften anpaßt und dann die durch sie bedingten störenden Spannungen des inneren Randes durch eine Funktion in der Form f_2 kompensiert. f_2 ruft nun wieder störende Restspannungen auf dem äußeren Rand hervor, die durch eine Funktion in der Form f_1 aufgehoben werden könnten. Diese Restspannungen werden stets kleiner und nach unendlich oft wiederholten derartigen Schritten käme man zu einer vollständigen Darstellung der Spannungsfunktion. Eine Reihe der sich ergebenden Einzelfunktionen könnte man zu elliptischen Funktionen zusammenfassen, doch wird die Gesamtdarstellung außerordentlich unübersichtlich. Man bricht am besten, wie das auch Herr K. Wieghardt getan hat, nach der ersten Einführung der Funktion f_2 ab und kompensiert die Restspannungen mit dem Kreisringansatz Gl. (3). Der Vorteil des ganzen Verfahrens besteht darin, daß man die verwendeten Funktionen f_1 und f_2 in geschlossenen Ausdrücken darstellen kann, während sich die noch erforderliche Kreisringlösung als eine zur Berechnung ausreichend konvergente Reihe ergibt.

1. Die durchlochte Scheibe wird in zwei gegenüberliegenden Punkten ihres äußeren Randes beansprucht. Die Funktion, die man nach den Wieghardtschen Ueberlegungen zunächst als Spannungsfunktion der Vollscheibe in der Form f_1 einzuführen hätte, wäre die durch Gl. (8) dargestellte Funktion G_1. Diese »Grundspannungsfunktion« G_1 liefert auf dem inneren Rande $r_i = q$:

$$\overline{\overline{G_1}} = \frac{q^2}{2} - \sum_{u=1}^{\infty} \left[\frac{q^{2u}}{2u-1} - \frac{q^{2u+2}}{2n+1}\right] \cos 2u\varphi$$

und

$$\frac{\partial \overline{\overline{G_1}}}{\partial r} = q - \sum_{u=1}^{\infty} \left[\frac{2u\,q^{2u-1}}{2u-1} - \frac{(2u+2)\,q^{2u+1}}{2u+1}\right] \cos 2u\varphi .$$

Nun wäre eine Spannungsfunktion für die gelochte, unendliche Ebene

$$H_1 = A_0 \log r + \sum_{u=1}^{\infty} \left[C_{2u} r^{-2u} - D_{2u} r^{-2u+2}\right] \cos 2u\varphi \quad . \; . \; . \quad (9)$$

derart zu bestimmen, daß $G_1 + H_1$ einen von Schub- und Radialkräften freien inneren Rand liefert. Nach vorausgegangenen Ueberlegungen muß dann sein

$$\overline{\overline{G_1}} + \overline{\overline{H_1}} + \text{const} = 0 \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial \overline{\overline{G_1}}}{\partial r} + \frac{\partial \overline{\overline{H_1}}}{\partial r} = 0 .$$

Mit diesen Beziehungen bestimmen sich die Konstanten in Gl. (9) und man erhält

$$H_1 = -q^2 \log r - \sum_{u=1}^{\infty} \left[\frac{q^{4u+2}}{2u+1} r^{-2u} + (1-q^2)\,q^{4u}\,r^{-2u} - \frac{q^{4u-2}}{2u-1} r^{-2u+2} - (1-q^2)\,q^{4u-2}\,r^{-2u+2}\right] \cos 2u\varphi \quad . \; . \; . \quad (10).$$

Die durch H_1 auf dem äußeren Rand hervorgerufenen störenden Restspannungen werden nun durch eine Kreisringlösung K_1 in der Art der Gl. (3) kompensiert, dabei soll aber der innere Rand spannungsfrei bleiben. Die Bedingungen für K_1 sind also dieselben wie die durch die Gl. (5) bezeichneten. Bildet man $\overline{H_1}$ und $\frac{\partial \overline{H_1}}{\partial r}$, so wird ersichtlich, daß man dort nur zu setzen hätte

$$\left.\begin{aligned} &\beta_0 = q^2 , \qquad \alpha_{2u} = \left[\frac{q^4}{2u+1} - \frac{1}{2u-1} - (1-q^2)^2\right] q^{4u-2} , \qquad \alpha_{2u-1} = \beta_{2u-1} = 0 \\ &\beta_{2u} = -\left[\frac{2u\,q^4}{2u+1} - \frac{(2u-2)}{2u-1} + 2u\,(1-q^2)\,q^2 - (2u-2)\,(1-q^2)\right] q^{4u-2} \end{aligned}\right\} \quad (11),$$

um nach Gl. (6) die kompensierende Funktion K_1 zu finden.

$$K_1 = -\frac{q^4}{1-q^2} \log r + \frac{q^2 r^2}{2(1-q^2)} + \sum_{u=1}^{\infty} \left[A_{2u} r^{2u} - B_{2u} r^{2u+2} + C_{2u} r^{-2u} - D_{2u} r^{-2u+2}\right] \cos 2u\varphi \quad (12).$$

Die Formeln (7) liefern die Konstanten

$$\left.\begin{aligned}
A_{2u} &= \frac{\alpha_{2u}\,[(2u+2)(1-q^{4u}) + 4u^2 q^{4u}(1-q^2)] - \beta_{2u}\,[(1-q^{4u}) - 2u\,q^{4u}(1-q^2)]}{2\,[(1-q^{4u})^2 - 4u^2 q^{4u-2}(1-q^2)^2]}\\
B_{2u} &= \frac{\alpha_{2u}\,[2u(1+q^{4u}-2q^{4u-2}) + 4u^2 q^{4u-2}(1-q^2)] - \beta_{2u}\,[(1-q^{4u}) - 2u\,q^{4u-2}(1-q^2)]}{2\,[(1-q^{4u})^2 - 4u^2 q^{4u-2}(1-q^2)^2]}\\
C_{2u} &= \frac{\alpha_{2u}\,[(2u-2)(1-q^{4u}) + 4u^2(1-q^2)] + \beta_{2u}\,[(1-q^{4u}) - 2u(1-q^2)]}{2\,[(1-q^{4u})^2 - 4u^2 q^{4u-2}(1-q^2)^2]}\,q^{4u}\\
D_{2u} &= \frac{\alpha_{2u}\,[2u(2-q^2-q^{4u+2}) + 4u^2(1-q^2)] + \beta_{2u}\,[(1-q^{4u})\,q^2 - 2u(1-q^2)]}{2\,[(1-q^{4u})^2 - 4u^2 q^{4u-2}(1-q^2)^2]}\,q^{4u-2}
\end{aligned}\right\} \quad (13)$$

wobei α_{2u} und β_{2u} die in (11) dargestellten Werte sind.

Die Funktionen G_1 und H_1 lassen sich leicht in geschlossener Form darstellen. Ist $z = x + y\,i = r\,e^{i\varphi}$ und bezeichnet ein vorgesetztes $\Re$ den reellen Bestandteil der nachfolgenden komplexen Funktion und ebenso $\Im$ den Faktor von i bei einer solchen Funktion, so wird aus Gl. (8)

$$G_1 = \frac{r^2}{2} - \Re \sum_{u=1}^{\infty} \left(\frac{z^{2u}}{2u-1} - \frac{r^2 z^{2u}}{2u+1}\right) = \frac{r^2}{2} - \Re \sum_{u=1}^{\infty} \left(z\,\frac{z^{2u-1}}{2u-1} - \frac{r^2}{z}\,\frac{z^{2u+1}}{2u+1}\right) \quad (14).$$

Mit

$$\sum_{u=1}^{\infty} \frac{z^{2u+1}}{2u+1} = \sum_{u=1}^{\infty} \frac{z^{2u-1}}{2u-1} - z$$

läßt sich der letzte Ausdruck umformen in

$$G_1 = -\frac{r^2}{2} - \Re\left(z - \frac{r^2}{z}\right) \sum_{u=1}^{\infty} \frac{z^{2u-1}}{2u-1}.$$

Da $z - \dfrac{r^2}{z} = i\,2\,r \sin\varphi$ und $2 \sum\limits_{u=1}^{\infty} \dfrac{z^{2u-1}}{2u-1} = \log \dfrac{1+z}{1-z}$, wird G_1 schließlich

$$G_1 = -\frac{r^2}{2} + r \sin\varphi\; \Im \log \frac{1+z}{1-z} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (15).$$

Ist $w = u + i\,v$, so hat man $\Im \log w = \operatorname{arctg} v/u$. Entsprechend ergibt sich hier:

$$G_1 = -\frac{r^2}{2} + r \sin\varphi \left\{\operatorname{arctg} \frac{r \sin\varphi}{1 + r\cos\varphi} + \operatorname{arctg} \frac{r \sin\varphi}{1 - r\cos\varphi}\right\}.$$

Dies ist dieselbe Formel, wie sie bei Föppl[1]) als Ergebnis der Hertzschen Untersuchung »Ueber die Verteilung der Druckkräfte in einem elastischen Kreiszylinder«[2]) angeführt wird. Sie ist dort nur in teilweise anderen Koordinaten geschrieben und hat auch das entgegengesetzte Vorzeichen, da der angreifende Radialdruck als der Radiusvektorrichtung entgegenwirkend negativ angesetzt wurde.

Auf dieselbe Weise findet man einen geschlossenen Ausdruck für die Funktion H_1. Unter Verwendung der komplexen Größe z läßt sich Gl. (10) umformen in

$$H_1 = -q^2 \log r - \Re \sum_{u=1}^{\infty} \left[\frac{q^{4u+2} z^{-2u}}{2u+1} - r^2\,\frac{q^{4u-2} z^{-2u}}{2u-1}\right] - (1-q^2)\left(\frac{q^2 - r^2}{q^2}\right) \Re \sum_{u=1}^{\infty} q^{4u} z^{-2u}.$$

Wegen

$$z \sum_{u=1}^{\infty} \frac{(q^2 z^{-1})^{2u+1}}{2u+1} = z \sum_{u=1}^{\infty} \frac{(q^2 z^{-1})^{2u-1}}{2u-1} - q^2$$

und der Summationsformeln

$$2 \sum_{u=1}^{\infty} \frac{z^{2u-1}}{2u-1} = \log \frac{1+z}{1-z} \quad \text{und} \quad \sum_{u=1}^{\infty} z^{2u} = \frac{z^2}{1-z^2}$$

folgt daraus, wenn man sogleich eine sich ergebende additive Konstante q^2 wegläßt:

$$H_1 = -q^2 \log r + r \sin\varphi\; \Im \log \frac{1 + q^2 z^{-1}}{1 - q^2 z^{-1}} - (1-q^2)\,\frac{(q^2 - r^2)}{q^2}\, \Re\, \frac{q^4 z^{-2}}{1 - q^4 z^{-2}} \quad (16).$$

Da sich die zu ermittelnde Spannungsfunktion F_1 additiv aus den Funktionen G_1, H_1 und K_1 zusammensetzt, hat man endlich nach den Gl. (12), (15) und (16)

$$\begin{aligned}
F_1 = &-\frac{q^2}{1-q^2} \log r - \frac{(1-2q^2)}{2(1-q^2)}\,r^2 + r\sin\varphi\; \Im \log \frac{(1+z)(1+q^2 z^{-1})}{(1-z)(1-q^2 z^{-1})} - (1-q^2)\,\frac{(q^2 - r^2)}{q^2}\, \Re\, \frac{q^4 z^{-2}}{1 - q^4 z^{-2}}\\
&+ \sum_{u=1}^{\infty} \left(A_{2u} r^{2u} - B_{2u} r^{2u+2} + C_{2u} r^{-2u} - D_{2u} r^{-2u+2}\right) \cos 2u\varphi \quad . \; . \; . \; . \quad (17).
\end{aligned}$$

[1]) A. Föppl, Techn. Mechanik, Bd. V, S. 339, 1907, Formel 358.

[2]) H. Hertz, Zeitschr. für Math. u. Physik, Bd. 28, S. 125, 1883.

Um daraus eine reelle Darstellung von F_1 zu erhalten, müssen die auftretenden komplexen Funktionen in ihre reellen und imaginären Bestandteile zerlegt werden. Dabei macht man mit Vorteil Gebrauch von einer komplexen Hilfsgröße $\xi = x - y\,i = r(\cos\varphi - i\sin\varphi)$. Es ist also $\xi^u = r^u(\cos u\,\varphi - i\sin u\,\varphi)$ und $z\cdot\xi = r^2$. Die erste in Gl. (17) auftretende komplexe Funktion wird nun leicht in ihren reellen und imaginären Bestandteil zerlegt, wenn man den Bruch unter dem log-Zeichen mit $(1-\xi)(1-q^2\xi^{-1})$ erweitert. Es ergibt sich

$$\log\frac{(1+z)(1-\xi)(1+q^2z^{-1})(1-q^2\xi^{-1})}{(1-z)(1-\xi)(1-q^2z^{-1})(1-q^2\xi^{-1})} = \log\frac{(1+z-\xi-r^2)(1+q^2z^{-1}-q^2\xi^{-1}-q^4r^{-2})}{(1-z-\xi+r^2)(1-q^2z^{-1}-q^2\xi^{-1}+q^4r^{-2})}$$

$$= \log\frac{(1-r^2+2\,i\,r\sin\varphi)(1-q^4r^{-2}-2\,i\,q^2r^{-1}\sin\varphi)}{(1+r^2-2\,r\cos\varphi)(1+q^4r^{-2}-2\,q^2r^{-1}\cos\varphi)}$$

$$= \log\frac{(1-r^2)(1-q^4r^{-2})+4\,q^2\sin^2\varphi+i\,2\,(1+q^2)(r-q^2r^{-1})\sin\varphi}{(1+r^2-2\,r\cos\varphi)(1+q^4r^{-2}-2\,q^2r^{-1}\cos\varphi)}.$$

Den imaginären Bestandteil dieser Funktion findet man nun wegen $\Im\log(u+iv) = \operatorname{arctg} u/v$ leicht zu

$$\operatorname{arctg}\frac{2\,(1+q^2)(r-q^2r^{-1})\sin\varphi}{(1-r^2)(1-q^4r^{-2})+4\,q^2\sin^2\varphi}.$$

Die Umformung des zweiten komplexen Bruches in Gl. (17) vollzieht sich ähnlich, indem man mit $(1-q^4\xi^{-2})$ erweitert. Als endgültige Darstellung der Spannungsfunktion ergibt sich schließlich

$$F_1 = -\frac{q^2}{1-q^2}\log r - \frac{1-2\,q^2}{2\,(1-q^2)}r^2 + r\sin\varphi\,\operatorname{arctg}\frac{2\,(1+q^2)(r-q^2r^{-1})\sin\varphi}{(1-r^2)(1-q^4r^{-2})+4\,q^2\sin^2\varphi}$$
$$+(1-q^2)\frac{(q^2-r^2)}{r^2}\frac{q^8r^{-4}-q^4r^{-2}\cos 2\,\varphi}{1+q^8r^{-4}-2\,q^4r^{-2}\cos 2\,\varphi} + \sum_{u=1}^{\infty}\left[A_{2u}r^{2u} - B_{2u}r^{2u+2}\right.$$
$$\left.+\,C_{2u}r^{-2u} - D_{2u}r^{-2u+2}\right]\cos 2\,u\,\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18),$$

worin die Konstanten A_{2u} usw. die durch (13) bzw. (11) dargestellten Werte bedeuten.

Aus dieser Funktion F_1 erhält man nun die gesuchten Spannungen t_{11}, t_{22} und t_{12}, indem man mit ihr die durch die Formeln (1) vorgeschriebenen Differentialoperationen ausführt. Diese Berechnungen gestalten sich jedoch etwas schwierig. Nicht ganz so umfangreich wird die Rechnung, wenn man auf die einfache Summendarstellung für F_1 zurückgeht, wie sie wegen $F_1 = G_1 + H_1 + K_1$ in den Gl. (8), (10) und (12) enthalten ist. In diesem Falle bestimmt man auch mit einigem Vorteil nicht die Spannungen selbst, sondern die Ausdrücke $t_{11}+t_{22}$, $t_{11}-t_{22}$ und t_{12}. Für die allgemeine Form der Spannungsfunktion

$$F = A_0\log r - B_0r^2 + \sum_{u=1}^{\infty}(A_ur^u - B_ur^{u+2} + C_ur^{-u} - D_ur^{-u+2})\cos u\,\varphi \quad . \quad (3)$$

findet man leicht

$$t_{11}+t_{22} = -4\,B_0 - 4\sum_{u=1}^{\infty}\left[(u+1)\,B_ur^u - (u-1)\,D_ur^{-u}\right]\cos u\,\varphi \quad . \quad . \quad (19),$$

$$t_{11}-t_{22} = 2\,A_0r^{-2}\cos 2\,\varphi - 2\sum_{u=1}^{\infty}\left\{\left[u\,(u-1)\,A_ur^{u-2} - u\,(u+1)\,B_ur^u\right]\cos(u-2)\,\varphi\right.$$
$$\left.+\left[u\,(u+1)\,C_ur^{-u-2} - u\,(u-1)\,D_ur^{-u}\right]\cos(u+2)\,\varphi\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20),$$

$$t_{12} = A_0r^{-2}\sin 2\,\varphi + \sum_{u=1}^{\infty}\left\{\left[u\,(u-1)\,A_ur^{u-2} - u\,(u+1)\,B_ur^u\right]\sin(u-2)\,\varphi\right.$$
$$\left.-\left[u\,(u+1)\,C_ur^{-u-2} - u\,(u-1)\,D_ur^{-u}\right]\sin(u+2)\,\varphi\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21).$$

Wendet man auf diese Formeln die Summendarstellung für F_1 an, so kann man die aus G_1 und H_1 folgenden Werte ganz auf dieselbe Art zu geschlossenen Ausdrücken zusammenfassen, wie das oben mit G_1 und H_1 selbst gezeigt wurde. Auf diese Weise erhält man schließlich

$$t_{11}+t_{22} = \frac{2}{1-q^2} - 4\left\{\frac{r^4-r^2\cos 2\,\varphi}{1+r^4-2\,r^2\cos 2\,\varphi} - \frac{q^8r^{-4}-q^4r^{-2}\cos 2\,\varphi}{1+q^8r^{-4}-2\,q^4r^{-2}\cos 2\,\varphi}\right\}$$
$$+\frac{8\,(1-q^2)}{q^2}\frac{2\,q^8r^{-4}-(q^4r^{-2}+q^{12}r^{-6})\cos 2\,\varphi}{[1+q^8r^{-4}-2\,q^4r^{-2}\cos 2\,\varphi]^2}$$
$$-4\sum_{u=1}^{\infty}\left[(2\,u+1)\,B_{2u}r^{2u} - (2\,u-1)\,D_{2u}r^{-2u}\right]\cos 2\,u\,\varphi \quad . \quad . \quad . \quad (22),$$

$$t_{11} - t_{22} = -\frac{2\,q^2}{1-q^2}\,r^{-2}\cos 2\,\varphi + 4\,(1-r^2)\left\{\frac{1 - 2\,r^2\cos 2\,\varphi + r^4\cos 4\,\varphi}{[1 + r^4 - 2\,r^2\cos 2\,\varphi]^2}\right.$$

$$\left. + \frac{q^{16}\,r^{-8} - 2\,q^{12}\,r^{-6}\cos 2\,\varphi + q^8\,r^{-4}\cos 4\,\varphi}{q^4\,[1 + q^8\,r^{-4} - 2\,q^4\,r^{-2}\cos 2\,\varphi]^2}\right\} + 8\,(1-q^2)\,\frac{(q^2-r^2)}{q^6}$$

$$\frac{3\,q^{16}r^{-8} - q^{24}r^{-12} - (3\,q^{12}r^{-6} - 2\,q^{20}r^{-10})\cos 2\,\varphi + (q^8\,r^{-4} - 3\,q^{16}r^{-8})\cos 4\,\varphi + q^{12}r^{-8}\cos 6\,\varphi}{[1 + q^8\,r^{-4} - 2\,q^4\,r^{-2}\cos 2\,\varphi]^3}$$

$$- 2\sum_{u=1}^{\infty}\{[2\,u\,(2\,u-1)\,A_{2u}\,r^{2u-2} - 2\,u\,(2\,u+1)\,B_{2u}\,r^{2u}]\cos(2\,u-2)\,\varphi$$

$$+ [2\,u\,(2\,u+1)\,C_{2u}\,r^{-2u-2} - 2\,u\,(2\,u-1)\,D_{2u}\,r^{-2u}]\cos(2\,u+2)\,\varphi\} \quad . \quad . \quad (23),$$

$$t_{12} = -\frac{q^2}{1-q^2}\,r^{-2}\sin 2\,\varphi - 2\,(1-r^2)\left\{\frac{2\,r^2\sin 2\,\varphi - r^4\sin 4\,\varphi}{[1 + r^4 - 2\,r^2\cos 2\,\varphi]^2} + \frac{2\,q^{12}\,r^{-6}\sin 2\,\varphi - q^8\,r^{-4}\sin 4\,\varphi}{q^4\,[1 + q^8\,r^{-4} - 2\,q^4\,r^{-2}\cos 2\,\varphi]^2}\right\}$$

$$- 4\,(1-q^2)\,\frac{(q^2-r^2)}{q^6}\,\frac{(3\,q^{12}r^{-6} - 4\,q^{20}r^{-10})\sin 2\,\varphi - (q^8\,r^{-4} - 3\,q^{16}r^{-8})\sin 4\,\varphi - q^{12}r^{-6}\sin 6\,\varphi}{[1 + q^8\,r^{-4} - 2\,q^4\,r^{-2}\cos 2\,\varphi]^3}$$

$$+ \sum_{u=1}^{\infty}\{[2\,u\,(2\,u-1)\,A_{2u}\,r^{2u-2} - 2\,u\,(2\,u+1)\,B_{2u}\,r^{2u}]\sin(2\,u-2)\,\varphi$$

$$- [2\,u\,(2\,u+1)\,C_{2u}\,r^{-2u-2} - 2\,u\,(2\,u-1)\,D_{2u}\,r^{-2u}]\sin(2\,u+2)\,\varphi\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24).$$

Bei der Ableitung dieser Formeln war $r_a = 1$ und $r_i = q$ gesetzt worden. Bei der Anwendung ist also für q der Wert $\frac{r_i}{r_a}$ und für r der durch r_a dividierte Radius in Rechnung zu stellen. Ueberdies ist dann noch der oben erwähnte Faktor $\frac{2\,k\,\varepsilon}{\pi}$ zu berücksichtigen, der nur der Einfachheit halber weggelassen wurde.

2. Die durchlochte Scheibe wird in drei in gleichen Abständen befindlichen Punkten beansprucht. Es sei wieder der äußere Rand $r_a = 1$ und der innere $r_i = q$. Wäre $q = 0$, so läge das entsprechende Problem der Vollscheibe vor und nach den Gl. (1) und (34) der schon genannten Arbeit von H. Rieth würde die Spannungsfunktion, wenn die Druckstelle jeweils den kleinen Winkelbereich $2\,\varepsilon$ umfaßt, lauten:

$$F = \frac{3\,k\,\varepsilon}{\pi}\,\frac{r^2}{2} + \frac{3\,k\,\varepsilon}{\pi}\sum_{u=1}^{\infty}(-1)^{u+1}\,\frac{\sin 3\,u\,\varepsilon}{3\,u\,\varepsilon}\left[\frac{r^{3u}}{(3\,u-1)\,r_a^{3u-2}} - \frac{r^{3u+2}}{(3\,u+1)\,r_a^{3u}}\right]\cos 3\,u\,\varphi.$$

Für $r_a = 1$ und unter Voraussetzung eiuer punktförmigen Druckstelle ($\varepsilon \to 0$) wird daraus

$$F = \frac{3\,k\,\varepsilon}{\pi}\left\{\frac{r^2}{2} + \sum_{u=1}^{\infty}(-1)^{u+1}\left[\frac{r^{3u}}{3\,u-1} - \frac{r^{3u+2}}{3\,u+1}\right]\cos 3\,u\,\varphi\right\}.$$

Unter der Grundspannungsfunktion sei nun wieder die Funktion $\frac{\pi}{3\,k\,\varepsilon}\,F = G_2$ verstanden. Diese Funktion

$$G_2 = \frac{r^2}{2} + \sum_{u=1}^{\infty}(-1)^{u+1}\left[\frac{r^{3u}}{3\,u-1} - \frac{r^{3u+2}}{3\,u+1}\right]\cos 3\,u\,\varphi \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

liefert auf dem äußeren Rand $r_a = 1$ die gewünschten Randspannungen, sie ruft aber auf dem inneren Rande ebenfalls Spannungen hervor, die durch eine Funktion H_2 beseitigt werden sollen. Zwischen G_2 und H_2 müssen dann die Beziehungen bestehen

$$\overline{G_2} + \overline{H_2} + \text{konst} = 0, \qquad \overline{\frac{\partial G_2}{\partial r}} + \overline{\frac{\partial H_2}{\partial r}} = 0,$$

woraus für H_2, wenn man den naheliegenden Ansatz

$$H_2 = A_0\log r + \sum_{u=1}^{\infty}(-1)^{u+1}\,[C_{3u}\,r^{-3u} - D_{3u}\,r^{-3u+2}]\cos 3\,u\,\varphi$$

macht, folgt

$$H_2 = -q^2\log r + \sum_{u=1}^{\infty}(-1)^{u+1}\left[\frac{q^{6u+2}}{3\,u+1}\,r^{-3u} + (1-q^2)\,q^{6u}\,r^{-3u}\right.$$

$$\left. - \frac{q^{6u-2}}{3\,u-1}\,r^{-3u+2} - (1-q^2)\,q^{6u-2}\,r^{-3u+2}\right]\cos 3\,u\,\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26).$$

Die durch H_2 auf dem äußeren Rand bedingten störenden Restspannungen werden nun durch eine Kreisringlösung K_2 kompensiert. Den inneren Rand soll K_2 spannungsfrei lassen, so daß für diese Funktion Bedingungen in der Form der Gl. (5) bestehen. Bildet man H_2 und $\frac{\partial H_2}{\partial r}$, so erkennt man, daß man in den Formeln (5) nur zu setzen hätte

$$\beta_0 = q^2, \quad \alpha_{3u-2} = \alpha_{3u-1} = \beta_{3u-2} = \beta_{3u-1} = 0$$

$$\alpha_{3u} = -(-1)^{u+1}\left[\frac{q^4}{3u+1} - \frac{1}{3u-1} - (1-q^2)^2\right] q^{6u-2},$$

$$\beta_{3u} = (-1)^{u+1}\left[\frac{3uq^4}{3u+1} - \frac{(3u-2)}{3u-1} + 3u(1-q^2)q^2 - (3u-2)(1-q^2)\right] q^{6u-2} \quad (27),$$

um durch Gl. (6) die gesuchte Funktion K_2 zu erhalten.

$$K_2 = -\frac{q^4}{1-q^2}\log r + \frac{q^2 r^2}{2(1-q^2)} + \sum_{u=1}^{\infty}\left[A_{3u} r^{3u} - B_{3u} r^{3u+2} + C_{3u} r^{-3u} - D_{3u} r^{-3u+2}\right]\cos 3u\varphi \quad (28).$$

Die Konstanten A_{3u} usw. ergeben sich, ausgedrückt mit Hilfe der durch die Beziehungen (27) bestimmten α_{3u} usw., sofort aus den Formeln (7), wenn man dort u durch $3u$ ersetzt.

Die Summe der Funktionen G_2, H_2 und K_2 stellt nun die gesuchte Spannungsfunktion F_2 dar. G_2 und H_2 lassen sich dabei wieder in geschlossenen Ausdrücken darstellen. Ist wiederum $z = r \cdot e^{i\varphi}$, so wird z. B. aus G_2 mit der schon oben gebrauchten Bezeichnungsweise für den reellen und imaginären Bestandteil einer komplexen Funktion

$$G_2 = \frac{r^2}{2} + \Re \sum_{u=1}^{\infty} (-1)^{u+1}\left[\frac{z^{3u}}{3u-1} - \frac{r^2 z^{3u}}{3u+1}\right].$$

Mit Hilfe einfacher Summationsformeln läßt sich dies überführen in

$$G_2 = -\frac{r^2}{2} - \frac{r\sin\varphi}{3}\,\Im\log\frac{1+z^3}{(1+z)^3} + \frac{2r\cos\varphi}{\sqrt{3}}\,\Re\operatorname{arctg}\frac{2z-1}{\sqrt{3}} \quad . \quad . \quad . \quad (29).$$

Eine reelle Darstellung für G_2 ergibt sich daraus leicht unter Verwendung der Hilfsgröße $\xi = x - yi$, wie das oben bei der Funktion H_1 gezeigt wurde. Ganz auf dieselbe Weise findet man einen endlichen Ausdruck für die bei H_2 auftretende Summe. Es ergibt sich schließlich bei der Addition von K_2 und den derart umgeformten Funktionen G_2 und H_2

$$\begin{aligned}
F_2 = &-\frac{q^2}{1-q^2}\log r - \frac{1-2q^2}{2(1-q^2)}r^2 \\
&+ \frac{r\sin\varphi}{3}\Bigg\{\operatorname{arctg}\frac{3(r-r^5)\sin\varphi + 3(r^2-r^4)\sin 2\varphi}{1+r^6+3(r+r^5)\cos\varphi+3(r^2+r^4)\cos 2\varphi + 2r^3\cos 3\varphi} \\
&- \operatorname{arctg}\frac{3(q^2r^{-1}-q^{10}r^{-5})\sin\varphi + 3(q^4r^{-2}-q^8r^{-4})\sin 2\varphi}{1+q^{12}r^{-6}+3(q^2r^{-1}+q^{10}r^{-5})\cos\varphi + 3(q^4r^{-2}+q^8r^{-4})\cos 2\varphi + 2q^6r^{-3}\cos 3\varphi}\Bigg\} \\
&- \frac{r\cos\varphi}{\sqrt{3}}\Bigg\{\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}(1-2r\cos\varphi)}{1-2r^2+2r\cos\varphi} - \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}(1-2q^2r^{-1}\cos\varphi)}{1-2q^4r^{-2}+2q^2r^{-1}\cos\varphi}\Bigg\} \\
&+ (1-q^2)\left(1-\frac{r^2}{q^2}\right)\frac{q^{12}r^{-6}+q^6r^{-3}\cos 3\varphi}{(1+q^{12}r^{-6}+2q^6r^{-3}\cos 3\varphi)} \\
&+ \sum_{u=1}^{\infty}\left[A_{3u}r^{3u} - B_{3u}r^{3u+2} + C_{3u}r^{-3u} - D_{3u}r^{-3u+2}\right]\cos 3u\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30).
\end{aligned}$$

Die Spannungskomponenten t_{11}, t_{22} und t_{12} kann man daraus durch die in den Formeln (1) vorgeschriebenen Differentialoperationen herleiten. Zweckmäßiger bildet man jedoch wieder die Ausdrücke $t_{11} + t_{22}$, $t_{11} - t_{22}$ und t_{12} aus der durch die Addition der Gl. (25), (26) und (28) folgenden Summendarstellung der Spannungsfunktion F_2. Die dabei auftretenden, von G_2 und H_2 herrührenden Summen formt man dann in der oben schon mehrfach beschriebenen Art und Weise zu einem geschlossenen Ausdruck um. So ergibt sich bei Verwendung folgender Abkürzungen:

$$N_1 = 1 + r^6 + 2r^3\cos 3\varphi, \qquad N_2 = 1 + q^{12}r^{-6} + 2q^6r^{-3}\cos 3\varphi.$$

$$\begin{aligned}
t_{11} + t_{22} = &\frac{2}{1-q^2} - 4\left\{(r^6 + r^3\cos 3\varphi)\frac{1}{N_1} - (q^{12}r^{-6} + q^6r^{-3}\cos 3\varphi)\frac{1}{N_2}\right\} \\
&+ \frac{12(1-q^2)}{q^2}\left\{2q^{12}r^{-6} + (q^6r^{-3} + q^{18}r^{-9})\cos 3\varphi\right\}\frac{1}{N_2^2} \\
&- 4\sum_{u=1}^{\infty}\left[(3u+1)B_{3u}r^{3u} - (3u-1)D_{3u}r^{-3u}\right]\cos 3u\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t_{11} - t_{22} = & - \frac{2\,q^2}{1-q^2}\, r^{-2} \cos 2\,\varphi - 6\,(1-r^2) \Big\{ (r \cos \varphi + 2\,r^4 \cos 2\,\varphi + r^7 \cos 5\,\varphi)\, \frac{1}{N_1{}^2} \\ & + (q^{22}\, r^{-11} \cos \varphi + 2\,q^{16}\, r^{-8} \cos 2\,\varphi + q^{10}\, r^{-5} \cos 5\,\varphi)\, \frac{1}{q^4\, N_2{}^2} \Big\} \\ & - 18\,(1-q^2)\, \frac{(q^2-r^2)}{q^6} \Big\{ (3\,q^{22} r^{-11} - q^{34} r^{-17}) \cos \varphi + 3\,(q^{16} r^{-8} - q^{28} r^{-14}) \cos 2\,\varphi \\ & + q^{28}\, r^{-14} \cos 4\,\varphi + (q^{10}\, r^{-5} - 3\,q^{22}\, r^{-11}) \cos 5\,\varphi - q^{16}\, r^{-8} \cos 8\,\varphi \Big\} \frac{1}{N_2{}^3} \\ & - 2 \sum_{u=1}^{\infty} \{ [3\,u\,(3\,u-1)\, A_{3u}\, r^{3u-2} - 3\,u\,(3\,u+1)\, B_{3u}\, r^{3u}] \cos (3\,u-2)\,\varphi \\ & + [3\,u\,(3\,u+1)\, C_{3u}\, r^{-3u-2} - 3\,u\,(3\,u-1)\, D_{3u}\, r^{-3u}] \cos (3\,u+2)\,\varphi \} \quad . \quad . \quad (32), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t_{12} = & - \frac{q^2}{1-q^2}\, r^{-2} \sin 2\,\varphi + 3\,(1-r^2) \Big\{ (r \sin \varphi - 2\,r^4 \sin 2\,\varphi - r^7 \sin 5\,\varphi)\, \frac{1}{N_1{}^2} \\ & + (q^{22}\, r^{-11} \sin \varphi - 2\,q^{16}\, r^{-8} \sin 2\,\varphi - q^{10}\, r^{-5} \sin 5\,\varphi)\, \frac{1}{q^4\, N_2{}^2} \Big\} \\ & + 9\,(1-q^2)\, \frac{(q^2-r^2)}{q^6} \Big\} (3\,q^{22}\, r^{-11} - q^{34}\, r^{-17}) \sin \varphi - 3\,(q^{16}\, r^{-8} - q^{28}\, r^{-14}) \sin 2\,\varphi \\ & + q^{28}\, r^{-14} \sin 4\,\varphi - (q^{10}\, r^{-5} - 3\,q^{22}\, r^{-11}) \sin 5\,\varphi + q^{16}\, r^{-8} \sin 8\,\varphi \Big\} \frac{1}{N_2{}^4} \\ & + \sum_{u=1}^{\infty} \{ [3\,u\,(3\,u-1)\, A_{3u}\, r^{3u-2} - 3\,u\,(3\,u+1)\, B_{3u}\, r^{3u}] \sin (3u-2)\,\varphi \\ & - [3\,u\,(3\,u+1)\, C_{3u}\, r^{-3u-2} - 3\,u\,(3\,u-1)\, D_{3u}\, r^{-3u}] \sin (3\,u+2)\,\varphi \} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33). \end{aligned}$$

B) Die Versuche und ihre Uebereinstimmung mit der Theorie.

Da die Doppelbrechung der inneren Spannung proportional ist[1]), kann man die Spannungsverhältnisse in einem auf Druck oder Zug beanspruchten Körper auf rein optischem Wege durch Bestimmung der hervorgerufenen Doppelbrechung ermitteln. Die hier zu diesem Zweck verwendete Versuchsanordnung ist dieselbe, wie sie in den oben erwähnten Arbeiten von H. Steinheil und H. Rieth und ebenso in dem Buche von Miura[2]) des näheren beschrieben ist. Aus dem Licht der Quecksilberbogenlampe L wird durch den Monochromator M die intensive, grüne Quecksilberlinie von der Wellenlänge $\lambda = 546{,}00\ \mu\mu$ ausgewählt. Das divergent austretende Lichtbündel wird durch eine Linse s parallel gemacht und durchsetzt dann der Reihe nach den Polarisator P, den Kreuztisch K_r, der die zu untersuchende Glasscheibe trägt, den Kompensator K_0 und schließlich den Analysator A (siehe Abb. 3). Da gefordert werden mußte, daß die Lichtstrahlen die Glasscheibe senkrecht und möglichst nur in einem engen Bündel durchsetzten, gestaltete sich die Justierung der Apparatur außerordentlich schwierig. Zunächst erhielten der Polarisator und der Analysator, die beide, wie auch der Kompensator, auf der optischen Bank verschiebbar waren, in der Mitte ihres Gewichtsfeldes je eine kleine Blende b_1 und b_2 von etwa $^1/_2$ mm Oeffnung. (In Abb. 3 nur durch die Bezeichnungen b_1 usw. angedeutet.) Sie wurden dann auf genau gleiche Höhe gestellt und nun Monochromator M und Linse s derart angeordnet, daß das parallele Lichtbündel beide Blenden durchfiel. Zu dem auf diese Weise festgelegten Lichtstrahl mußten nun die übrigen Teile der Apparatur senkrecht eingebaut werden. Es geschah das mit Hilfe eines Fernrohres, das mit einem Gaußschen Okular versehen war. Dieses wurde auf unendlich eingestellt und so angebracht, daß man in der Mitte seines Gesichts-

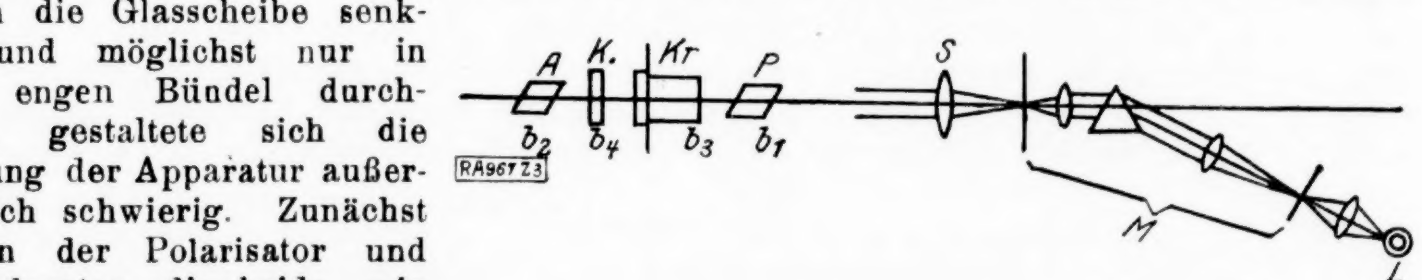


Abb. 3. Skizze der Versuchsanordnung.

[1]) Brewster: Phil. Trans. I. Teil p. 156, 1816.

[2]) Akira Miura: Spannungskurven in rechteckigen und keilförmigen Trägern. Berlin, J. Springer, 1928.

feldes das durch die kleinen Blenden des Polarisators und Analysators ausgesonderte enge Lichtbündel als grünen Lichtfleck wahrnahm. Die Stellung des Fernrohres war dabei eine scharf begrenzte. Nachdem so erreicht war, daß die Fernrohrachse mit großer Annäherung mit dem gegebenen Lichtstrahl zusammenfiel, wurde der Kreuztisch justiert. Dieser trug auf der dem Polarisator zugewandten Seite in seiner Drehachse eine weitere Blende b_3. Dort wo an ihm die Druckvorrichtung angebracht werden sollte, wurde eine planparallele Platte befestigt. Der Kreuztisch wurde nun so gestellt, daß einmal das schmale Lichtbündel die Blende b_3 wirklich durchsetzte, und daß außerdem das von der aufgekitteten Planplatte herrührende Spiegelbild des Fernrohrfadenkreuzes mit dem durch das Fernrohr direkt gesehenen auch bei Umdrehen des Kreuztisches zusammenfiel. Auf dieselbe Weise wurde auch der Kompensator, der in der Mitte seines Gesichtsfeldes die kleine Blende b_4 trug, eingebaut. Die zu untersuchende Glasscheibe wurde zunächst nur leicht in die Druckvorrichtung eingeklemmt und erst nachdem sie zu dem Lichtstrahl senkrecht gestellt war, durch weiteres Anziehen der Druckschraube voll beansprucht.

Die Voruntersuchungen erstreckten sich in der Hauptsache nur auf die Bestimmung der Kompensatorkonstanten. Verwendet wurde ein Soleil-Babinetscher Kompensator, dessen Achsen in der Quarzplatte und in den Quarzkeilen vertikal und horizontal verliefen. Polarisator und Analysator wurden deshalb unter einer Neigung von 45° gegen die Horizontale aufgestellt, um die schärfsten Verdunkelungsstreifen zu erhalten. Deren Lage wurde im Mittel aus 10 Messungen bei —25,17, —12,38, 0,45, 13,31, 26,19 der Kompensatorteilung gefunden. Der mittlere Abstand dieser Streifen war also 12,84, d. h. der Gangdifferenz von einer Wellenlänge entsprachen 12,84 Skalenteile am Kompensator. Verwendete man statt der grünen Quecksilberlinie weißes Licht, so trat nur bei +0,45 Verdunklung ein. Der Nullpunkt des Kompensators lag also bei +0,45.

Die Glasscheibe, mit der die Versuche ausgeführt wurden, war gut planparallel und hatte einen äußeren Durchmesser von 50 mm und einen inneren von 16 mm. Die Kreuztischkoordinaten ihres Mittelpunktes wurden festgelegt, indem mit Hilfe des Fernrohres von vier, paarweise gegenüberliegenden Randpunkten der Scheibe diese Koordinaten ermittelt wurden. So ergab sich nach einer kleinen Rechnung im ersten Belastungsfall der Mittelpunkt bei $x = 29{,}9$, $y = 27{,}7$ und im zweiten bei $x = 29{,}8$, $y = 27{,}8$.

Zur Bestimmung der Druckrichtung, das ist die Lage der x-Achse in beiden Fällen, diente der Umstand, daß, wenn die Glasscheibe in dieser Richtung am Kreuztisch bei gekreuzten Nicols verschoben wird, keine Aufhellung eintreten darf. Die Lage der Druckachse wurde so im ersten Fall bei 107° und im zweiten bei 105° der Winkelteilung des Kreuztisches gefunden. Auf diese Stellung wurden jeweils die abgelesenen Winkel bezogen. Die Hauptspannungswinkel wurden gefunden, indem man bei gekreuzten Nicols die Winkel an der Winkelteilung des Kreuztisches ablas, bei denen Verdunklung eintrat. Es geschah das während einer vollen Umdrehung des Kreuztisches viermal. Aus diesen vier Ablesungen wurde dann unter Berücksichtigung der Nullstellung das arithmetische Mittel genommen. Im allgemeinen wurden die Hauptspannungswinkel nur auf $^1/_2$° genau bestimmt. Bei der Messung der Doppelbrechung mit Hilfe des Kompensators diente als Bezugspunkt in beiden Fällen der Punkt mit den Koordinaten $x = -14$, $y = 0$. Die

Zahlentafel 1.

Hauptspannungswinkel p_m (2 Druckpunkte).

	$y = 0$	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
$x = -24$	0°												
−22	0°	38°	52°	59°	60°	59°							
−20	0°	27°	39°	45,5°	47°	47°	46°						
−18	0°	20°	31°	35,5°	38°	36°	34°	32°					
−16	0°	16,5°	26°	29,5°	29,5°	29°	24,5°	21°	13°				
−14	0°	17°	23°	24°	23°	20,5°	17°	13°	5°	−9°			
−12	0°	16°	20°	19,5°	17°	14,5°	11°	6°	−1°	−13°	−37,5°		
−10	0°	13°	17°	15°	12°	9°	5°	0,5°	−6,5°	−16°	−35,5°		
−8	0°	−5°	6°	11°	7,5°	3°	0°	−5°	−11°	−21.5°	−39°	−64°	
−6					6°	2°	−4,5°	−8°	−15°	−24.5°	−44°	−68°	
−4					14°	1°	−6°	−11°	−16°	−27°	−54°	−77°	−83°
−2						2°	−5°	−8°	−11°	−21°	−69°	−86°	−88°
0						0°	0°	0°	0°	0°	−90°	−90°	−90°

Doppelbrechungsverhältnisse inbezug auf diesen Punkt wurden jedesmal bei den vier verschiedenen Winkelablesungen bestimmt und dann das Mittel aus diesen Beobachtungen gebildet. Auf diese Weise wurde die ganze Scheibe in Abständen von 2 mm untersucht.

Die Messungsergebnisse für die ringförmige Glasscheibe, die in zwei Punkten beansprucht wird, sind in den Zahlentafeln 1 und 2 dargestellt. Zahlentafel 1 gibt die Hauptspannungswinkel p_m für den Quadranten, der von der negativen x-Achse und der positiven y-Achse begrenzt wird. Die anderen Quadranten erwiesen sich als spiegelbildlich gleich. Die Winkel sind sämtlich gegen die positive x-Achse als Nullrichtung gemessen und geben nur die eine Schar der Trajektorien. Die andere weicht um 90^0 davon ab. Längs diesen Richtungen wirkt also keine Schubkraft. Da der Hauptspannungswinkel mit den Normalspannungen und der Schubspannung nach den Grundformeln der Elastizitätstheorie durch die Beziehung

$$\operatorname{tg} 2 p_m = \frac{2 t_{12}}{t_{11} - t_{22}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34),$$

verknüpft ist, muß der Winkel $p_m = 0$ oder $\pm \pi/2$ sein, wenn t_{12} verschwindet. In der Gl. (24), die für diesen Belastungsfall die Schubspannung t_{12} darstellt, tritt in allen Gliedern ein Faktor in der Form $\sin 2 u \varphi$ auf. Es muß also $p_m = 0$ bzw. $\pm \pi/2$ sein für $\varphi = 0$ und $\varphi = \pm \pi/2$, was auch durch die experimentellen Messungen bestätigt wird. Abgesehen von den starken Aenderungen, die die Hauptspannungsrichtung in der Nähe der Druckstellen erfährt, erkennt man aus Zahlentafel 1 eine im allgemeinen recht stetige Aenderung der Winkel p_m. Ein starker Sprung in der Hauptspannungsrichtung findet sich jedoch zwischen den Geraden $y = 18$ und $y = 20$. Dieses eigenartige Verhalten der Hauptspannungswinkel findet durch Abb. 4 seine Erklärung. Dort sind nach Art der Konstruktion eines magnetischen Feldes von etwa gleichen Abständen auf der x- und y-Achse ausgehend die Hauptspannungstrajektorien gezeichnet. In der Nähe der Druckpunkte ist der Verlauf dieser Linien derselbe wie bei der entsprechenden Beanspruchung einer Vollscheibe. Während sich die Drucktrajektorien allmählich der x-Achse nähern, ziehen sich die Zuglinien annähernd kreisförmig auf die Druckstellen selbst zusammen. In weiterer Entfernung von den Druckpunkten liegen die Verhältnisse allerdings ganz anders. Die Zuglinien werden flacher, je weiter sie sich von den Druckstellen entfernen und schließen sich endlich in ihrem oberen Teil gegen die y-Achse hin zusammen. Auch die Drucklinien laufen nicht mehr in einfachem Bogen nach den Druckpunkten zu, sondern erfahren eine Abflachung und wenden schließlich ihre hohle Seite den am weitesten entfernten Stellen der y-Achse zu. Ueberdies läßt der Verlauf der Hauptspannungslinien noch einige bemerkenswerte Punkte erkennen. Auf dem inneren wie äußeren Rand befinden sich je 4 Stellen — symmetrisch zur x- und y-Achse angeordnet —, die durch das in ihrer Nähe zu beobachtende Abbiegen der Hauptspannungslinien ihren Charakter als neutrale Punkte verraten. In der Tat zeigt die später angeführte Rechnung, daß dort alle Spannungen verschwinden. An diesen Stellen erfolgt auch der Wechsel in der Art und Weise, wie die Trajektorien in die Begrenzungen einmünden. Da nämlich nach Voraussetzung innerer und äußerer Rand schubspannungsfrei sein sollen, müssen sie auch Hauptspannungslinien sein; die aus dem Inneren kommenden Trajektorien müssen also entweder auf den Rändern senkrecht stehen oder aber sie tangential berühren. Man sieht z. B. in Abb. 4, wie die Zuglinien zunächst in der Umgebung der Druckpunkte mit dem äußeren Rand den Winkel $\pi/2$ einschließen, und dann, indem sie sich nach der y-Achse hinkrümmen, in diesen Rand tangential einmünden. Ein besonders

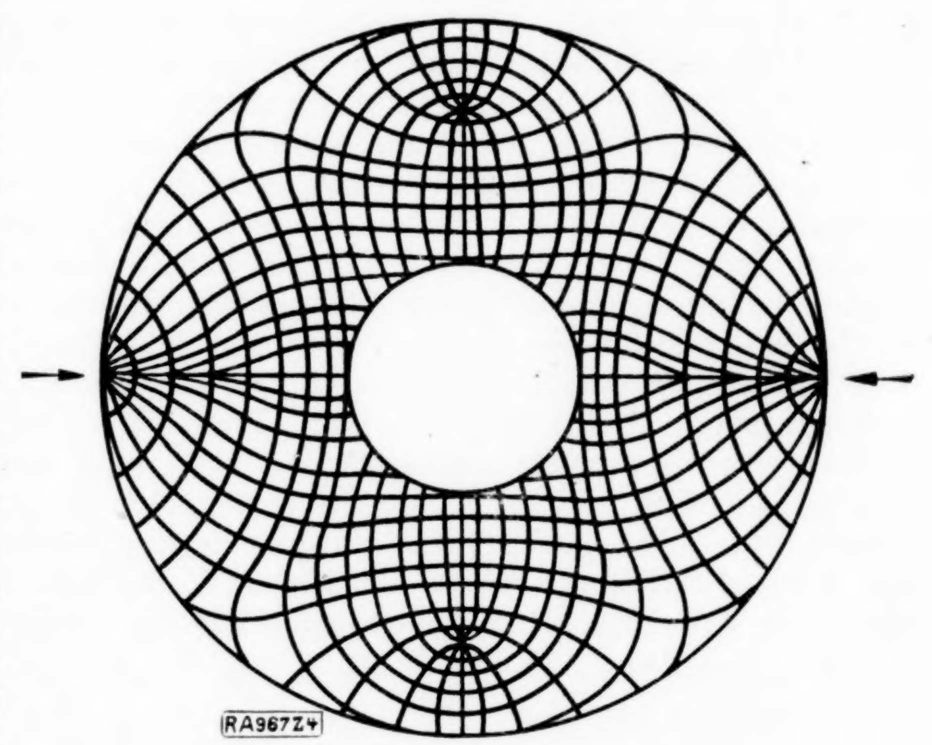


Abb. 4. Hauptspannungslinien.

ausgezeichnetes Punktepaar liegt auf der y-Achse. Dort findet der in Zahlentafel 1 zwischen $y = 18$ und $y = 20$ festgelegte Sprung der Hauptspannungsrichtung um 90^0 statt. Wegen des Verlaufs der Trajektorien in ihrer Nähe mögen diese Punkte hyperbolische genannt werden. Einige Zug- und Drucklinien gehen von dort wie von einer Art Quellstelle aus. Der Hauptspannungswinkel muß also unbestimmt werden, d. h. es wird hier wegen der Beziehung (34) zwischen den Spannungen und dem Winkel p_m die Spannungsdifferenz $t_{11} - t_{22}$ verschwinden müssen, da für die y-Achse $t_{12} = 0$ ist. Durch die Bestimmung der Doppelbrechung konnte das experimentell nachgewiesen werden. Im allgemeinen ist die Doppelbrechung der Differenz der Hauptspannungen $T_1 - T_2$ proportional. Dieser Ausdruck steht nun mit den nach der x- und y-Achse zerlegten Spannungen in der Beziehung

$$T_1 - T_2 = + \sqrt{(t_{11} - t_{22})^2 + 4\, t_{12}^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (35).$$

Wenn $t_{12} = 0$, wird die Doppelbrechung also $t_{11} - t_{22}$ proportional. Bei Messung der Spannungsverhältnisse mit dem Kompensator ergab sich nun, daß, wenn man die y-Achse als einheitliche Hauptspannungslinie auffaßte, d. h. wenn man für die ganze Achse $p_m = 0$ annahm, zur Auslöschung der Lichtkomponenten eine Drehung des Kompensators nach rechts notwendig war auf dem nach dem inneren Rand zu liegenden Stück der y-Achse, nach links für die Stellen zwischen hyperbolischem Punkt und äußerem Rand. Dieser Punkt selbst gab die Doppelbrechung null und wurde bei $y = 18{,}8$ gefunden. Die Rechnung, auf die wir noch zurückkommen, erwies ihn bei $y = 18{,}75$.

Bestimmt man die Doppelbrechung auf dem inneren Teil der y-Achse bei dem Winkel $p_m = 0$ und dann, nachdem man den hyperbolischen Punkt erreicht hat, bei $p_m = -\pi/2$, so stellt man zwar eine Abnahme der Doppelbrechung auf null fest, aber die Drehung des Kompensators bleibt stets in derselben Richtung erforderlich. Die y-Achse erfährt also, wie das ja auch Abb. 4 zeigt, eine Zweiteilung. Das Stück von $y = 8$ bis $y = 18{,}75$ ist als Zuglinie, das äußere als Drucklinie anzusprechen. Da auch in dem neutralen Punkt des äußeren Randes die Doppelbrechung verschwinden muß, könnte man auf den Gedanken kommen, daß es in dem Gebiet, das von den Geraden $y = 18$ und $y = 20$ begrenzt wird, eine diesen neutralen Punkt mit dem hyperbolischen verbindende Linie gibt, längs der die Doppelbrechung stets verschwindet. Zwar ersieht man aus Zahlentafel 2, welche die bei den in Zahlentafel 1 angegebenen Hauptspannungswinkeln gemessenen Doppelbrechungsverhältnisse wiedergibt, und noch besser aus der bildlichen Darstellung dieser Werte durch Abb. 5, daß die Doppelbrechung in diesem Gebiet stark abnimmt, aber ein gänzliches Verschwinden ist nur in dem hyperbolischen und neutralen Punkt festzustellen. Wenn die Doppelbrechung, d. h. die Differenz der Hauptspannungen gleich null werden soll, muß wegen Gl. (35) gleichzeitig $t_{11} - t_{22} = 0$ und $t_{12} = 0$ sein. Dann würde aber, wie aus Gl. (34) folgt, die Hauptspannungsrichtung unbestimmt. Der Verlauf der Hauptspannungslinien in dem in Frage stehenden Bereich gibt keinen Anlaß zu dieser Annahme. Ueberdies wurde mit Hilfe der Formeln (23), (24) und (35) das Doppelbrechungsverhältnis in einzelnen Punkten berechnet und so für $\varphi = 80^0$ und $r = 0{,}785$ der Wert 0,145, für $\varphi = 70^0$ und $r = 0{,}875$ der Wert 0,191, für

Zahlentafel 2.

Doppelbrechungsverhältnisse. Bezugspunkt $x = -14$, $y = 0$ (2 **Druckpunkte**).

	$y = 0$	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
$x = -24$													
-22	3,72	2,63	1,565	0,98	0,63	0,435							
-20	2,224	2,26	1,84	1,35	0,86	0,60	0,10						
-18	1,60	1,85	1,55	1,31	1,07	0,78	0.548	0,313					
-16	1,25	1,37	1,495	1,44	1,18	0,97	0,67	0,415	0,234				
-14	1.00	1,20	1,48	1,53	1,335	1,10	0,81	0,545	0,346	0,162			
-12	0,92	1,095	1,48	1,59	1,45	1,23	0,98	0,611	0.415	0,229	0,015		
-10	1,17	1,25	1,47	1,655	1,53	1,32	1,03	0,718	0,467	0,275	0,018		
-8		1,85	1,05	1,41	1,47	1,30	1,01	0,710	0,472	0,286	0,02	0 207	
-6					1,30	1,20	0,93	0,715	0,437	0,234	0,018	0,202	
-4					1,57	1,14	0,81	0,56	0,345	0,197	0,024	0,199	0,318
-2						1,32	0.710	0,475	0,253	0,18	0.027	0,202	0,346
0						1,047	0,57	0,36	0,18	0,04	0,07	0,20	0,335

$\varphi = 70^0$ und $r = 0{,}84$ der Wert 0,227 gefunden. r ist dabei der auf den Halbmesser des äußeren Randes reduzierte Radius. Diese Ergebnisse ordnen sich ohne Schwierigkeit in die Werte der Zahlentafel 2 ein.

Die Kurven konstanter Doppelbrechung (Abb. 5) verlaufen in allernächster Nähe der Druckpunkte ähnlich, wie bei dem in den erwähnten Arbeiten von H. Steinheil und H. Rieth behandelten Belastungsfall der Vollscheibe. In weiterer Entfernung treten aber ganz anders geartete Verhältnisse auf. Die Kurven konstanter Doppelbrechung laufen nicht mehr den Druckstellen zu, sondern schnüren sich ab und verlaufen teils geschlossen, wie z. B. auf dem inneren Teil der x-Achse. Eine Sonderstellung nehmen die neutralen und hyperbolischen Punkte mit der Doppelbrechung null ein.

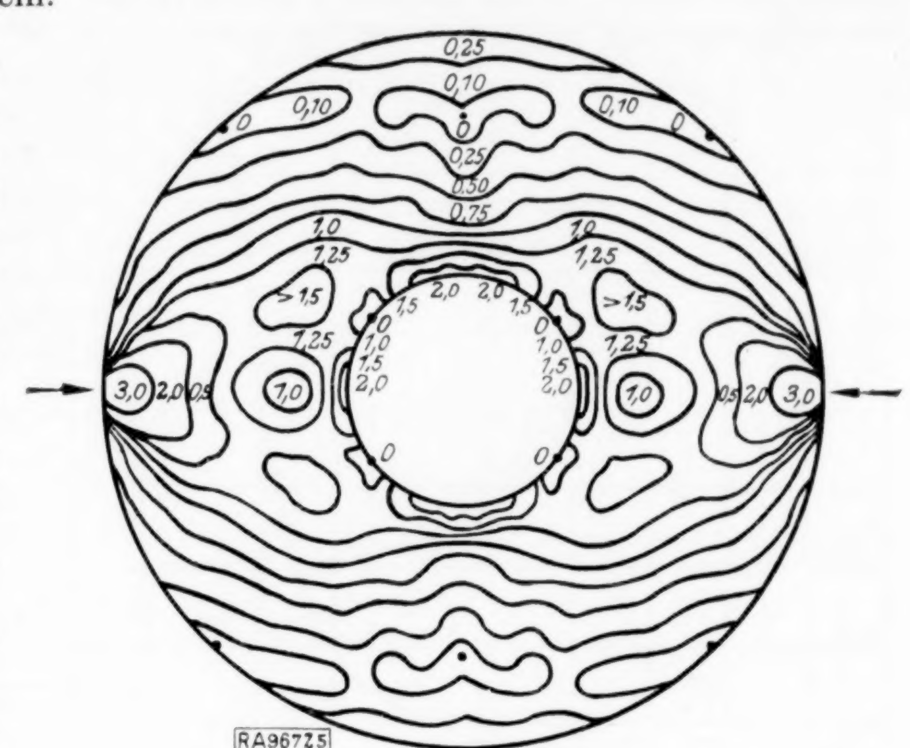


Abb. 5. Linien gleicher Doppelbrechung.

Um die experimentell gefundenen Ergebnisse zu überprüfen, und um sie durch die ja nicht meßbaren Randwerte zu ergänzen, wurden die Spannungen auf den Rändern und auf den Achsen berechnet. Da x- und y-Achse Hauptspannungslinien sind, wird dort die Doppelbrechung der Differenz der Normalspannungen proportional, die aber wegen Formel (35) stets als positiv anzusehen ist. Die Formel (23) gestattet für diese Fälle einige Vereinfachungen. Bezeichnet Δ_x die für die x-Achse gebildete Spannungsdifferenz $t_{11} - t_{22}$ und ebenso Δ_y diesen Ausdruck für die y-Achse, so findet man

$$\Delta_x = -\frac{2q^2}{1-q^2} r^{-2} + 4(1-r^2)\left\{\frac{1}{(1-r^2)^2} + \frac{q^4 r^{-4}}{(1-q^4 r^{-2})^2}\right\} + 8(1-q^2)\left(1-\frac{r^2}{q^2}\right)\frac{q^4 r^{-4} + q^8 r^{-6}}{(1-q^4 r^{-2})^3}$$
$$-2\sum_{u=1}^{\infty}\left[2u(2u-1)A_{2u} r^{2u-2} - 2u(2u+1)B_{2u} r^{2u} + 2u(2u+1)C_{2u} r^{-2u-2} - 2u(2u-1)D_{2u} r^{-2u}\right].$$

$$\Delta_y = \frac{2q^2}{(1-q^2)} r^{-2} + 4(1-r^2)\left\{\frac{1}{(1+r^2)^2} + \frac{q^4 r^{-4}}{(1+q^4 r^{-2})^2}\right\} + 8(1-q^2)\left(1-\frac{r^2}{q^2}\right)\frac{q^4 r^{-4} - q^8 r^{-6}}{(1+q^4 r^{-2})^3}$$
$$-2\sum_{u=1}^{\infty}(-1)^{u+1}\left[2u(2u-1)A_{2u} r^{2u-2} - 2u(2u+1)B_{2u} r^{2u} + 2u(2u+1)C_{2u} r^{-2u-2} - 2u(2u-1)D_{2u} r^{-2u}\right].$$

Für den Bezugspunkt $x = \pm 14$, $y = 0$ berechnet sich daraus beispielsweise ein Δ_x zu 4,126. Auf diesen Wert, der mit Δ_b bezeichnet wurde, wurden alle errechneten Spannungen bezogen.

In den Zahlentafeln 3 und 4 sind die errechneten und experimentell gewonnenen Doppelbrechungsverhältnisse zusammengestellt. Sie zeigen eine recht gute Uebereinstimmung

Zahlentafel 3.
x = Achse.

$x =$	8	10	12	14	16	18	20	22	24	25
Δ/Δ_b berechnet	2,538	1,040	0,870	1,000	1,246	1,622	2,284	3,844	11,844	∞
Δ/Δ_b experim.		1,170	0,92	1,000	1,25	1,60	2,24	3,72		

Zahlentafel 4.
y = Achse.

$y =$	8	10	12	14	16	18	20	22	24	25
Δ/Δ_b berechnet	2,880	1,301	0,706	0,410	0,215	0,058	−0,084	−0,226	−0,356	−0,424
Δ/Δ_b experim.		1,047	0,57	0,36	0,18	0,04	−0,07	−0,20	−0,335	

stimmung in Anbetracht des Umstandes, daß die zur Berechnung benutzten Formeln nur für eine streng punktförmige Druckstelle Geltung besitzen, eine Forderung, die sich nicht verwirklichen ließ, wenn auch die Druckkörper stumpfkantig zugespitzt waren, um eine Streckenbelastung möglichst zu vermeiden. Δ_y wird nach der angegebenen Formel für $y > 18{,}75$ negativ. In den Abb. 6 und 7 sind die Spannungsdifferenzen $t_{11} - t_{22}$ für die x- und y-Achse noch einmal graphisch aufgetragen.

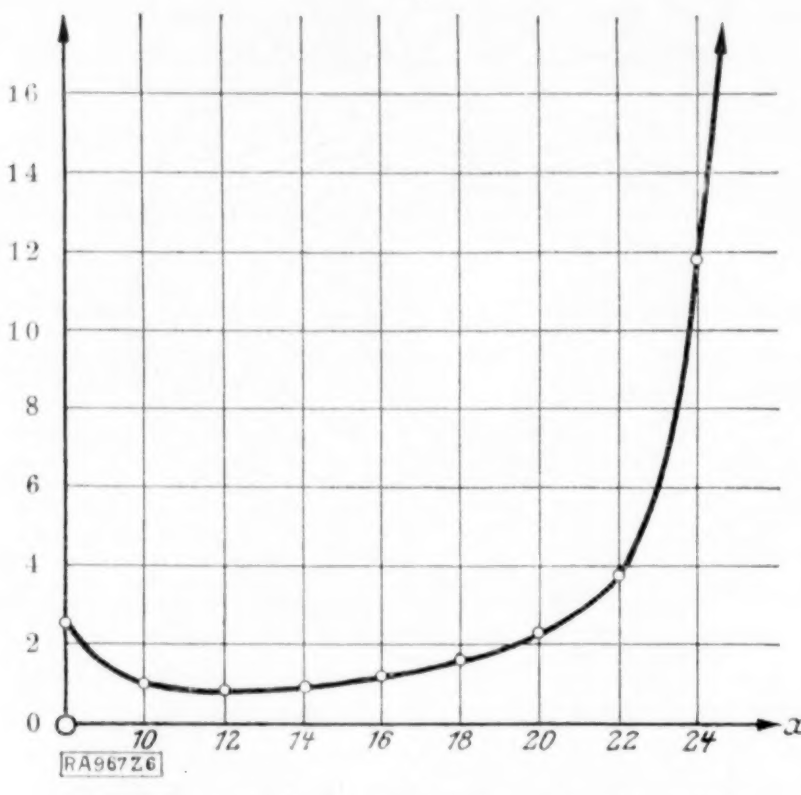


Abb. 6. Spannungsdifferenzen auf der x-Achse (2 Druckpunkte).

Zur Berechnung der Doppelbrechung auf dem inneren Rand kann einfach der Ausdruck $\overline{t_{11} + t_{22}}$ verwendet werden. Da ganz allgemein die Summe der Hauptspan-

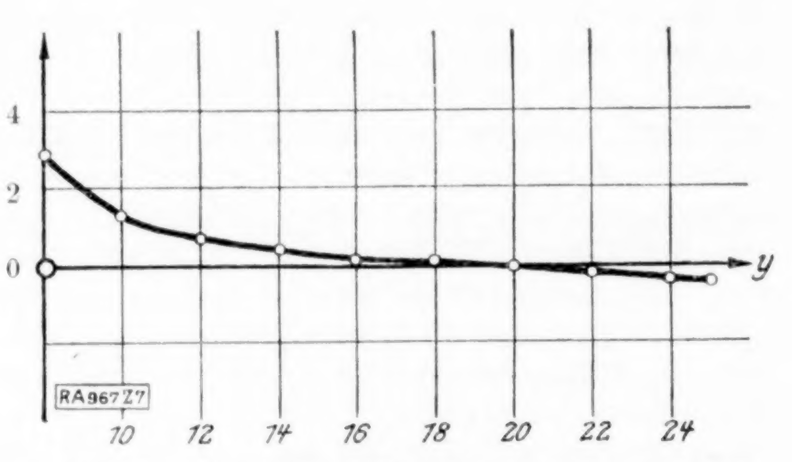


Abb. 7. Spannungsdifferenzen auf der y-Achse (2 Druckpunkte).

nungen gleich der Summe der Normalspannungen ist, hier aber die eine Hauptspannung, die in Richtung des Radiusvektors fällt, stets nach Voraussetzung gleich null ist, erhält man in $\overline{t_{11} + t_{22}}$ einfach die am inneren Rand wirksame Tangentialspannung. Durch ihren absoluten Betrag wird die Doppelbrechung auf dem Rand gemessen. Die Gl. (22) gestattet für diesen Fall weitgehende Vereinfachungen und man findet — abgesehen von einem Faktor $\frac{2k\varepsilon}{\pi}$ — in Uebereinstimmung mit dem Ergebnis der oben genannten Wieghardtschen Arbeit:

$$\overline{t_{11} + t_{22}} = \frac{2}{1-q^2} + \frac{8(1-q^2)}{q^2} \frac{2q^4 - (q^2+q^6)\cos 2\varphi}{[1+q^4-2q^2\cos 2\varphi]^2} - 8(1-q^2) \sum_{u=1}^{\infty} u\, q^{6u-4} \frac{4u^2(1-q^2)^2 + q^2(1-q^{4u})}{(1-q^{4u})^2 - 4u^2 q^{4u-2}(1-q^2)^2} \cos 2u\varphi .$$

Zahlentafel 5 gibt die nach dieser Formel berechneten, reduzierten Werte bei verschiedenen Winkeln, die zur Konstruktion der Kurve b in Abb. 8 verwendet wurden. Eine Nullstelle befindet sich bei $\varphi = 35^1/_2{}^0$. Dadurch ist also der neutrale Punkt, in dem sämtliche Spannungen verschwinden, auf dem inneren Rand festgelegt.

Für den äußeren Rand gelten, abgesehen von dem Druckpunkt, dieselben Ueberlegungen wie für den inneren Rand. Auch hier genügt es, den Ausdruck $\overline{t_{11} + t_{22}}$ zu bilden, um in seinem absoluten Betrag die Doppelbrechung und in ihm selbst die Tangentialspannung zu finden. Aus Gl. (22) folgt:

$$\overline{t_{11} + t_{22}} = \frac{2q^2}{1-q^2} + \frac{4(q^8 - q^4\cos 2\varphi)}{1+q^8-2q^4\cos 2\varphi} + \frac{8(1-q^2)}{q^2} \frac{2q^8 - (q^4+q^{12})\cos 2\varphi}{[1+q^8-2q^4\cos 2\varphi]^2} - 4\sum_{u=1}^{\infty} [(2u+1)B_{2u} - (2u-1)D_{2u}]\cos 2u\varphi .$$

Für den Druckpunkt selbst besitzt diese Formel keine Gültigkeit. Das hängt damit zusammen, daß in Gl. (22) das zweite, von der Grundspannungsfunktion herrührende Glied für $r = 1$ und $\varphi = 0$ oder π unbestimmt wird. In den Druckstellen muß man der Hauptspannungssumme und der Doppelbrechung den Wert ∞ zuschreiben.

Die in Zahlentafel 6 niedergelegten Ergebnisse und ihre Darstellung durch Abb. 8 lassen den neutralen Punkt des äußeren Randes bei etwa $\varphi = 47^1/_2{}^0$ in Erscheinung treten.

Zahlentafel 5.

φ	0°	10°	20°	30°	35°	36°	40°	45°	50°	60°	70°	80°	90°
$t_{11}+t_{22}$	−2,54	−2,26	−1,52	−0,55	−0,05	0,05	0,44	0,89	1,31	2,00	2,49	2,78	2,88

Zahlentafel 6.

φ	0°	10°	20°	30°	40°	45°	46°	47°	48°	50°	60°	70°	80°	90°
$t_{11}+t_{22}$	∞	0,53	0,44	0,29	0,13	0,04	0,02	0,008	−0,009	−0,04	−0,20	−0,32	−0,40	−0,42

Da nach den Grundlehren der Elastizitätstheorie die Summe der Normalspannungen gleich der Dilatation e ist, kann man auch aus dem Verhalten von $t_{11}+t_{22}$ schließen, ob die Beanspruchung des Materials auf Zug oder auf Druck größer ist. Nun war bereits auf Teilen des inneren wie äußeren Randes $t_{11}+t_{22}$ negativ gefunden worden. Dies legte den Gedanken nahe, daß sich überhaupt Gebiete abgrenzen lassen, in denen entweder die Zug- oder Druckbeanspruchung überwiegt. Zu diesem Zwecke wurden die Ausdrücke $t_{11}+t_{22}$ auch für die Achsen gebildet. Die mit Hilfe der Gl. (22) errechneten Werte sind durch die Zahlentafeln 7 und 8 und in den Abb. 9 und 10 dargestellt. Man erkennt, daß auf der x-Achse bei etwa $x = 13{,}05$ und auf der y-Achse bei $y = 21{,}0$ die Summe der Normalspannungen verschwindet. Durch rechnerisches Probieren wurden

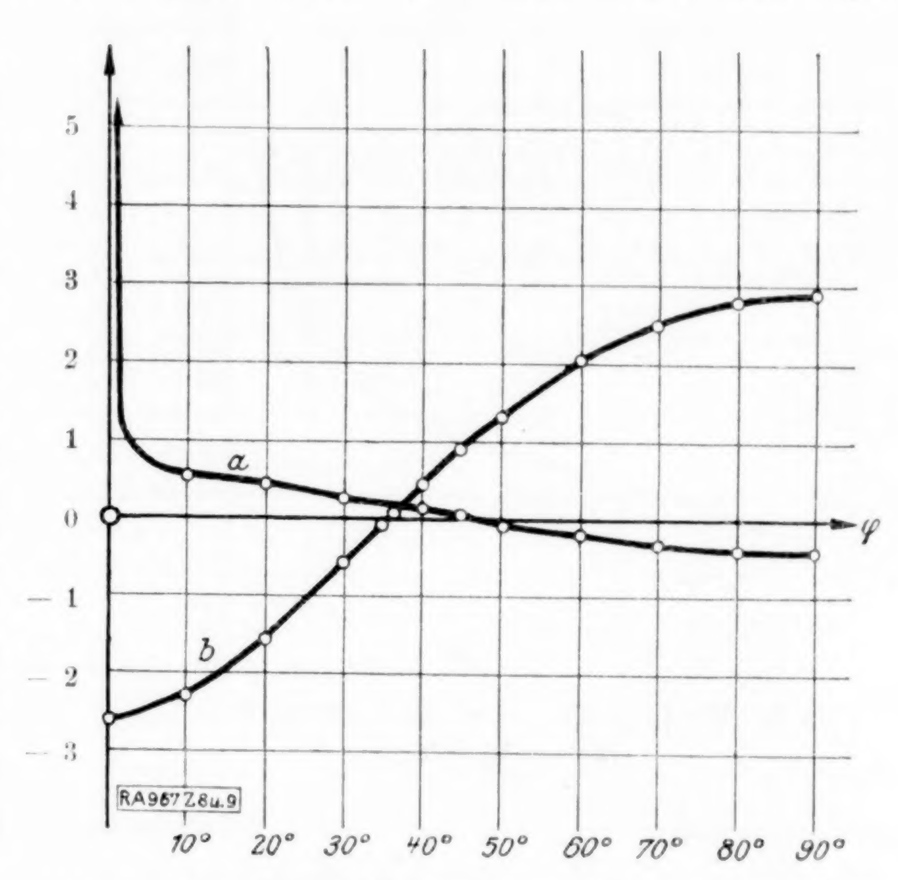


Abb. 8. a: Tangentialspannung auf dem äußeren Rand. b: Tangentialspannung auf dem inneren Rand. (Zwei Druckpunkte.)

Zahlentafel 7.

$x =$ Achse.

$x =$	8	10	12	12,5	13,0	13,05	13,225	14	16	18	20	22	24	25
$t_{11}+t_{12}$	−2,54	−1,13	−0,326	−0,167	−0,017	−0,002	0,055	0,264	0,803	1,42	2,35	4,11	12,33	∞

Zahlentafel 8.

$y =$ Achse.

$y =$	8	10	12	14	16	18	20	21	22	24	25
$t_{11}+t_{22}$	2,88	1,95	1,37	0,953	0,628	0,353	0,112	−0,001	−0,111	−0,322	−0,425

Zahlentafel 9.

$\varphi =$	10°	10°	20°	30°	30°	50°	60°	70°	80°
$r =$	0,52	0,60	0,50	0,44	0,46	0,965	0,885	0,86	0,85
$t_{11}+t_{22}$	+0,000	+0,473	−0,02	−0,005	+0,058	+0,002	+0,01	−0,006	−0,017

nun auch diese Nullstellen auf einzelnen Fahrstrahlen zu bestimmen gesucht. Das Ergebnis zeigt die Zahlentafel 9. Damit waren die Grundlagen zur Zeichnung der Abb. 11 gewonnen. Die dort schraffierten Teile des Kreisringes sind die Gebiete, in denen die Zugbeanspruchung überwiegt.

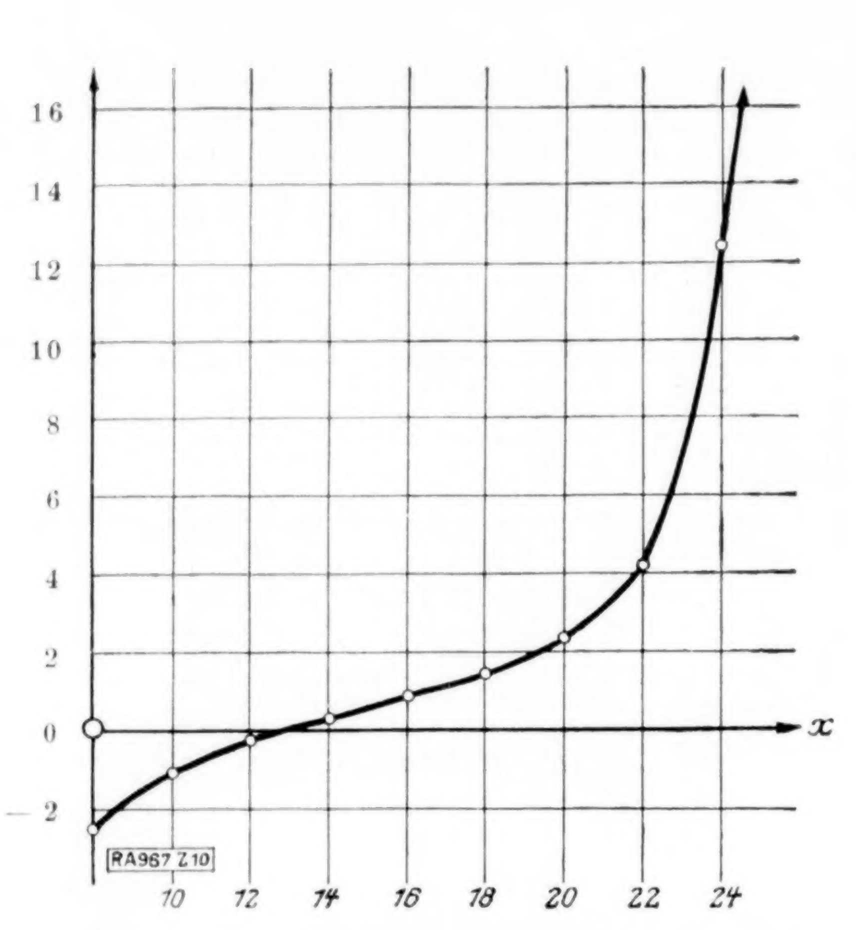


Abb. 9. Hauptspannungssumme auf der x-Achse. (2 Druckpunkte.)

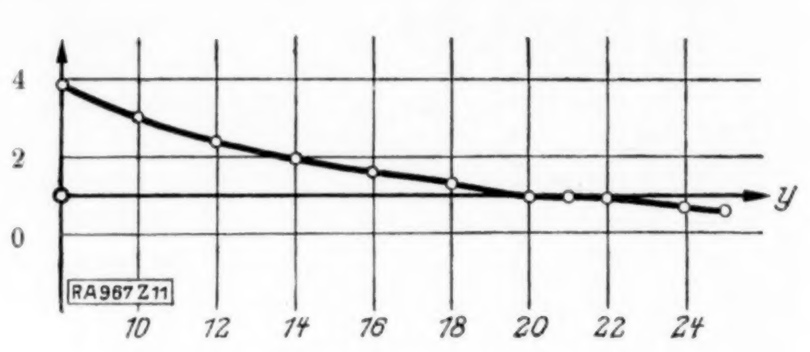


Abb. 10. Hauptspannungssumme auf der y-Achse. (2 Druckpunkte.)

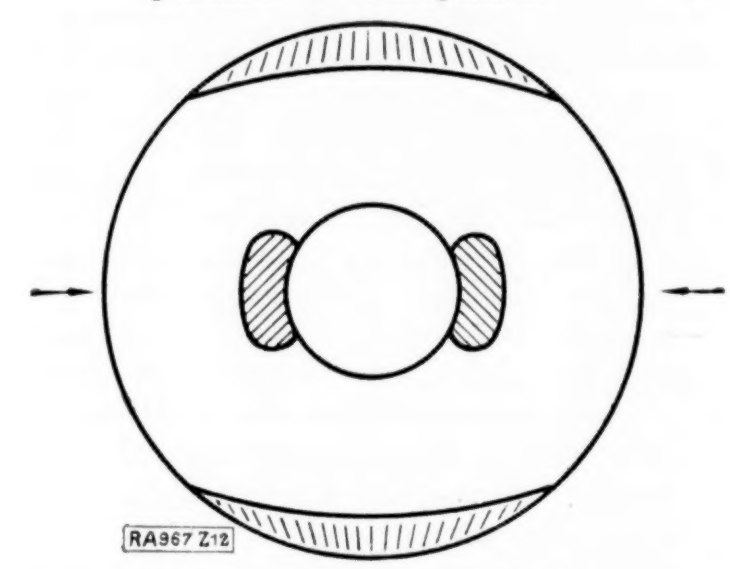


Abb. 11. Zug- und Druckgebiete.

Zahlentafel 10.

Hauptspannungswinkel p_m (3 Druckpunkte).

	$y = 0$	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
$x = -24$	0°	56°	72°										
−22	0°	42°	53°	58°	60°	62°							
−20	0°	28°	40°	47°	51°	48°	47°						
−18	0°	22°	32°	39°	40°	41°	40°	37°					
−16	0°	21°	29°	33°	35°	35°	35°	33°	27°				
−14	0°	22°	27°	29°	30°	30°	30°	29°	28°	20°			
−12	0°	26°	27°	26°	27°	26°	27°	27°	27°	26°			
−10	0°	31°	29°	27°	24°	24°	25°	26,5°	27°	30°			
− 8		32°	36°	37°	24°	24°	26°	30°	32°	33°	36°		
− 6					27°	29°	31°	34°	34°	32°	32°	33°	
− 4					27°	34°	36°	36°	33°	30°	28°	26°	23°
− 2						25°	36°	34°	33°	30°	25°	21°	16°
0						23,3°	33°	33,5°	30°	25°	22°	16°	12°
2						30,5°	32°	33°	29°	23°	20°	11°	−2°
4					47°	34°	33,8°	33°	30°	24°	15°	7°	−5°
6					83°	62°	45°	38,5°	33,5°	27°	17°	2°	
8		100,5°	96,5°	92,5°	87°	85,5°	75°	60°	50°	33°	20°	0,5°	
10	90°	85°	90°	87,5°	86,8°	87°	83°	80°	69°	55°	24°		
12	90°	84°	84°	85,5°	87°	89,5°	90°	88°	88°	98°	70°		
14	90°	85°	84°	86,5°	90°	92°	98°	99,5°	106°	114°			
16	90°	85,5°	86,5°	89°	92,5°	87°	100°	108°	118°				
18	90°	86.5°	87°	90,5°	95°	101°	107°	115°					
20	90°	87°	87,5°	91,5°	86,5°	102°							
22	90°	84°	85°	87°									
24	90°	80°											

Zahlentafel 11.

Doppelbrechungsverhältnisse. Bezugspunkt $x = -14$, $y = 0$ (3 Druckpunkte).

	$y = 0$	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
$x = -24$													
-22	4,45	2,80	1,45	0,825	0,455								
-20	2,80	2,28	1,70	1,18	0,765	0,453	0,262						
-18	1,94	1,85	1,65	1,31	0,97	0,690	0,415	0,218					
-16	1,33	1.51	1,55	1,38	1,11	0,810	0,570	0,360	0.168				
-14	1,00	1,25	1,47	1,40	1,19	0,955	0,677	0,445	0,280	0,10			
-12	0,528	1,08	1,42	1,44	1,25	0,995	0,732	0,530	0,370	0,190			
-10	0,20	0,97	1,37	1,36	1,23	0,975	0,755	0,570	0,410	0,257			
-8		0,44	1,85	1,79	1.19	0,975	0,775	0,703	0,490	0,375	0,235		
-6					1,27	0,96	0,885	0,775	0,690	0,495	0,240	0,160	
-4					1,68	1,22	0,985	0,90	0,75	0,647	0,370	0,19	
-2						1,50	1,21	1,05	0,976	0,73	0,54	0,353	
0						1,61	1,37	1,32	1,195	0,93	0,72	0,35	
2						1,20	1,41	1,40	1.39	1,05	0,95	0.535	
4						1,25	1,15	1,43	1,49	1,32	1.22	0,83	
6					0,73	0,54	0,95	1,40	1,72	1,66	1,44	0,815	
8			1,84	1,58	1,18	1,11	1,16	1,31	1,89	2.20	1,82		
10	1,25	1,32	1,46	1,36	1,43	1,455	1,49	1,71	2,02	3,05	3,42		
12	0,97	1,12	1,20	1,27	1,41	1,45	1,48	1,70	2,23	2,94			
14	0,90	0,881	0,98	1,12	1,18	1,23	1,33	1,51	1,57				
16	0,71	0,69	0,73	0,90	0,93	0,964	0,98	1,04	0,83				
18	0,53	0,55	0,61	0,65	0,62	0,68	0,57	0,52					
20	0 38	0,365	0,32	0,39	0,38	0,36							
22	0,21	0,17	0,19	0,165	0,13								
24													

Zahlentafel 12. $+x =$ Achse.

$x =$	8	10	12	14	16	18	20	22	24	25
Δ/Δ_b berechnet	2,607	1,340	1,033	0,890	0,750	0,584	0,402	0,216	0,043	0,046
Δ/Δ_b experim.		1,25	0,97	0,90	0,71	0,53	0,38	0,21		

Zahlentafel 13. $-x =$ Achse.

$x =$	-8	-10	-12	-14	-16	-18	-20	-22	-24	-25
Δ/Δ_b berechnet	0,791	0,240	0,564	1,00	1,481	2,083	3,025	5,082	15,632	∞
Δ/Δ_b experim.		0,20	0,528	1,00	1,33	1,94	2,80	4,45		

Zahlentafel 14.

$\varphi =$	0^0	10^0	20^0	30^0	40^0	43^0	50^0	60^0	
$t_{11} + t_{22}$	2,61	2,43	1,90	1,11	0,22	$-0,03$	$-0,51$	$-0,79$	

Zahlentafel 15.

$\varphi =$	0^0	10^0	15^0	20^0	30^0	40^0	50^0	60^0	
$t_{11} + t_{22}$	$-0,046$	$-0,026$	$-0,002$	0,028	0,103	0,178	0,233	∞	

Zahlentafel 16. $+x =$ Achse.

$x =$	8	10	12	14	16	18	20	22	24	25
$t_{11} + t_{22}$	2,61	1,76	1,32	1,03	0,80	0,59	0,40	0,22	0,04	$-0,05$

Zahlentafel 17. $-x =$ Achse.

$x =$	-8	$-9{,}25$	$-9{,}5$	-10	-12	-14	-16	-18	-20	-22	-24	-25
$t_{11} + t_{22}$	$-0{,}79$	$-0{,}07$	0,04	0,22	0,73	1,10	1,49	2,01	2,91	4,95	15,05	∞

Zahlentafel 18.

$\varphi =$	$7{,}5^0$	50^0
$r =$	0,985	0,37
$t_{11} + t_{22}$	$-0{,}002$	0,094

Diese Darstellung läßt deutlich den Einfluß erkennen, den das Loch in dem Ring auf die Spannungsverteilung in der Scheibe ausübt. Denn die vier Gebiete des überwiegenden Zuges, sowohl die am inneren Rande in der Druckrichtung wie die am äußeren Rande senkrecht dazu liegenden, sind unmittelbar als Wirkungen einer Durchbiegung aufzufassen, die der Ring unter dem an zwei Punkten angreifenden Druck erfährt.

Für den Fall dreier Druckpunkte sind in Zahlentafel 10 die gemessenen Hauptspannungswinkel für die Schar der Drucktrajektorien in einer Scheibenhälfte zusammengestellt. Abb. 12 gibt den Verlauf der Hauptspannungslinien. Wieder sind auf den

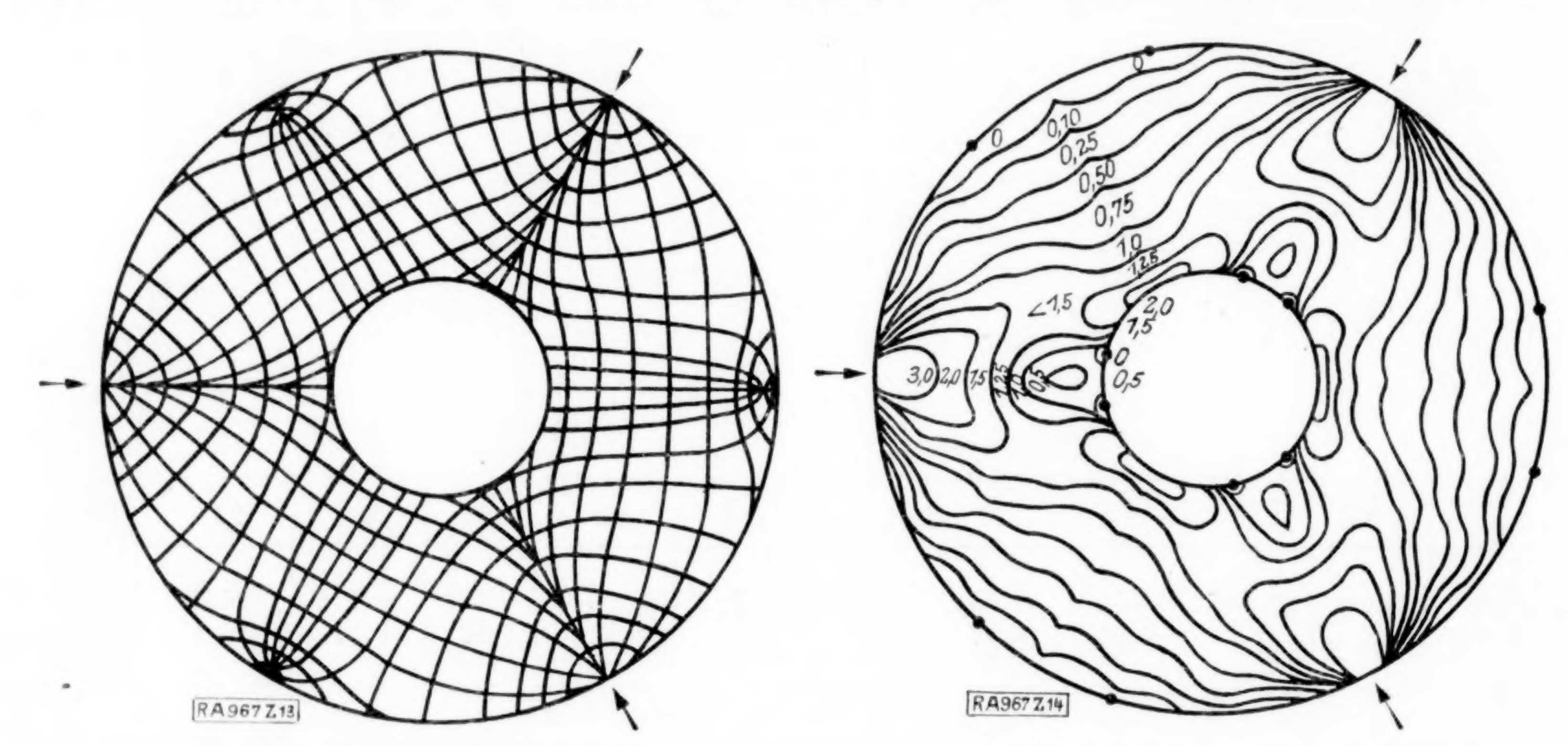


Abb. 12. Hauptspannungslinien. Abb. 13. Linien gleicher Doppelbrechung.

Rändern symmetrisch zu den Druckachsen neutrale Punkte angeordnet, ebenso wie auf den Geraden $\varphi = 0$, $\varphi = 120^0$, $\varphi = 240^0$ die hyperbolischen Punkte angedeutet sind. Der experimentellen Festlegung entzogen sich diese letzteren, da sie sehr nahe an den äußeren Rand gerückt sind.

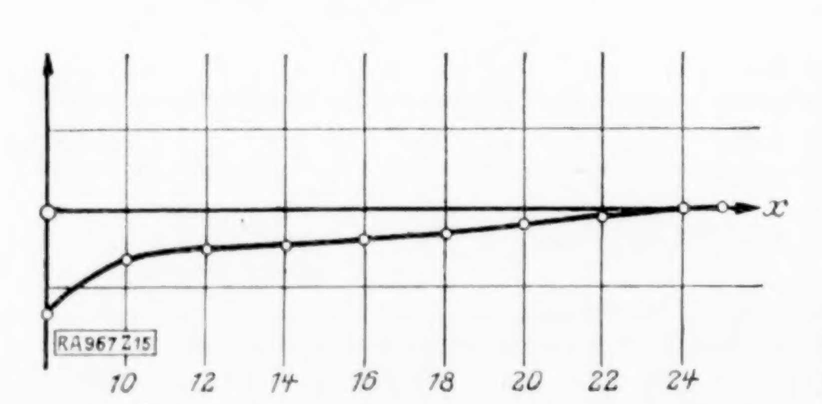


Abb. 14. Spannungsdifferenzen auf der $+x$-Achse. (3 Druckpunkte.)

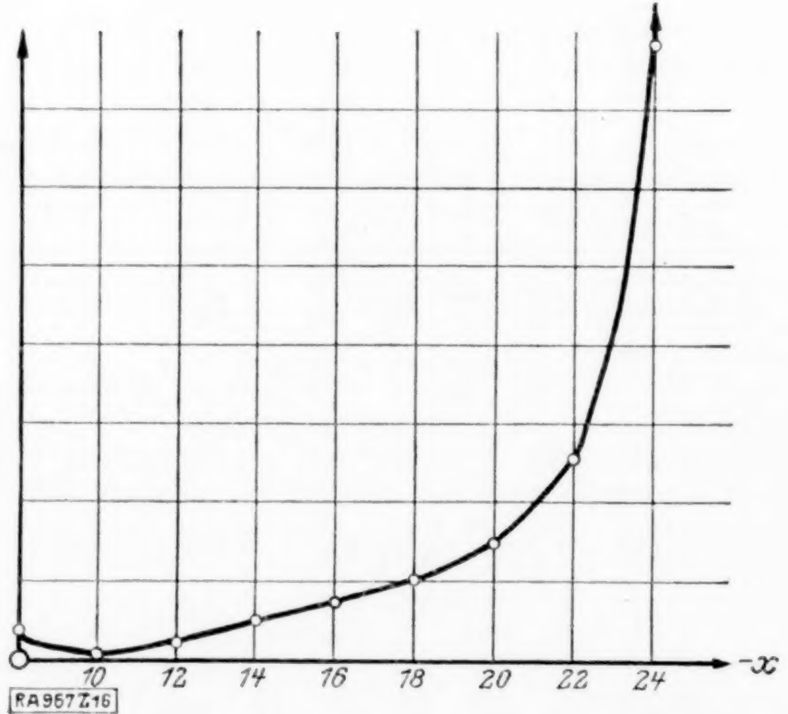


Abb. 15. Spannungsdifferenzen auf der $-x$-Achse. (3 Druckpunkte.)

Zahlentafel 11 enthält die gemessenen Doppelbrechungsverhältnisse für eine Hälfte der Platte, die zur Konstruktion der Linien konstanter Doppelbrechung in Abb. 14 verwendet wurden.

Die Doppelbrechungsverhältnisse konnten wieder auf den Geraden $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi$ mit Hilfe der Gl. (32) nachgeprüft werden. Für den Bezugspunkt $x = -14$, $y = 0$ liefert Gl. (32) für $t_{11} - t_{22}$ den Wert $+2{,}205$. Durch diese Zahl wurden jeweils auch die später angeführten, aus den Formeln berechneten Spannungen dividiert.

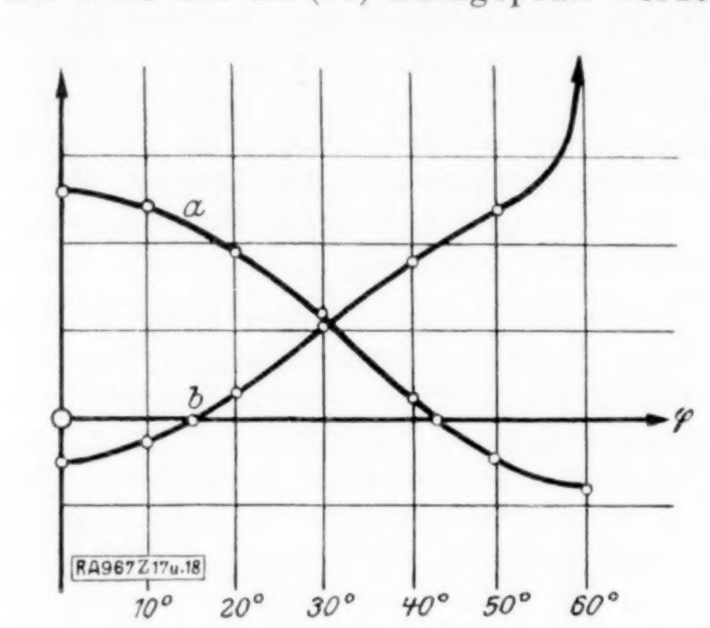


Abb. 16. a: Tangentialspannung auf dem inneren Rand. b: Tangentialspannung auf dem äußeren Rand Ordinaten 10-fach. (3 Druckpunkte.)

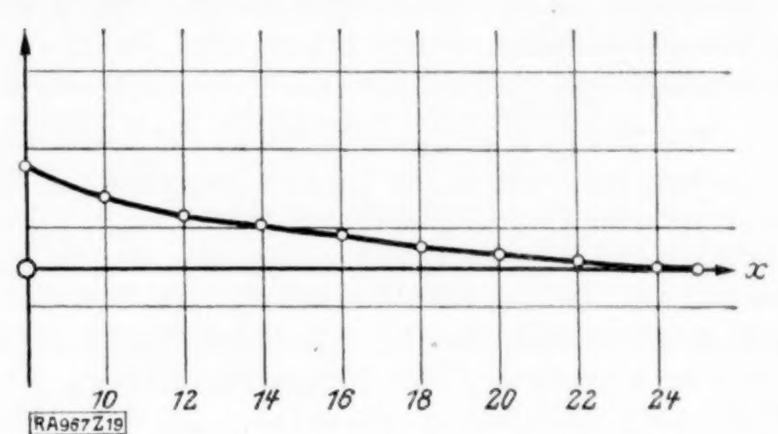


Abb. 17. Hauptspannungssumme auf der $+x$-Achse. (3 Druckpunkte.)

Wie aus den Zahlentafeln 12 und 13 ersichtlich ist, wurde auch hier eine weitgehende Uebereinstimmung zwischen dem Versuchsergebnis und der Rechnung festgestellt. Die Abb. 14 und 15 zeigen den Verlauf von $t_{11} - t_{22}$ längs der Geraden $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi$. Der hyperbolische Punkt auf der positiven x-Achse, für den $t_{11} - t_{22} = 0$ ist, liegt etwa bei $x = 24{,}5$. Ergänzt wurden die Messungen weiterhin durch die Spannungsberechnung auf den Rändern. Wiederum ist die Doppelbrechung hier den absoluten Beträgen von $t_{11} + t_{22}$ und $t_{11} + t_{22}$ proportional. Die mit Hilfe von Gl. (31) berechneten Werte für $r = q$ und $r = 1$ sind durch die Zahlentafeln 14 und 15 und graphisch durch die Abb. 16a und b dargestellt. Die neutralen Punkte befinden sich danach auf dem inneren Rand bei $\varphi = \pm 43^0$ und auf dem äußeren bei $\varphi = \pm 15{,}2^0$ bzw. bei den um 120^0 davon abweichenden Werten. Auf der positiven und negativen x-Achse sind Nullstellen von

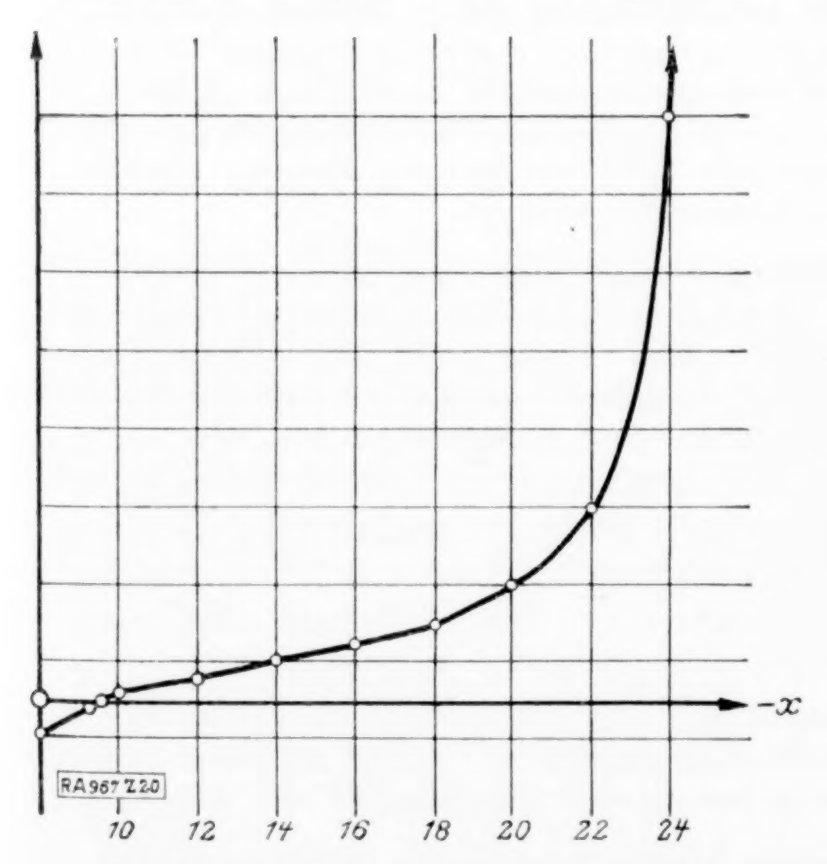


Abb. 18. Hauptspannungssumme auf der $-x$-Achse. (3 Druckpunkte.)

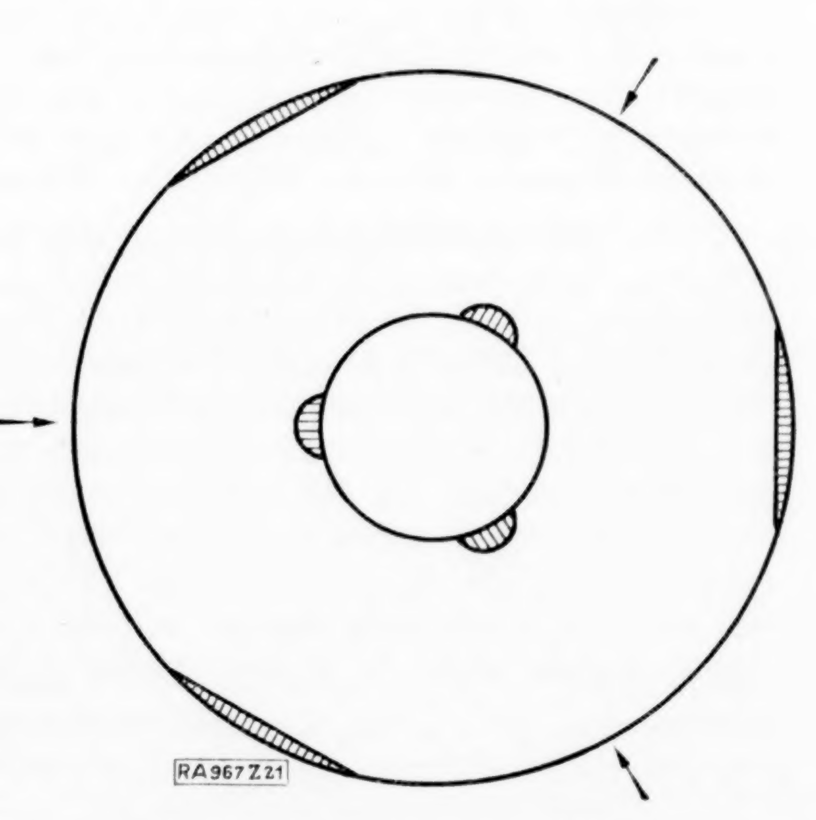


Abb. 19. Zug- und Druckgebiete.

$t_{11} + t_{22}$, wie die in den Zahlentafeln 16 und 17 und den Abb. 17 und 18 niedergelegten Rechnungsergebnisse ausweisen, vorhanden bei $x = 24{,}5$ und $x = -9{,}4$. Wo auf einzelnen Fahrstrahlen diese Spannungssumme verschwindet, zeigt die Zahlentafel 18. Mit Hilfe dieser Werte konnte nun die Abb. 19 entworfen werden, in der die schraffierten Teile der Scheibe wieder die Gebiete bezeichnen, in denen die Beanspruchung des Materials auf Zug die Druckbeanspruchung überwiegt. Hinsichtlich der Deutung dieser Zuggebiete gelten dieselben Ueberlegungen wie oben bei dem Fall eines an zwei gegenüberliegenden Punkten angreifenden Druckes. Aber ein Vergleich dieser Abbildung mit Abb. 11 zeigt, wie stark die Zuggebiete zurückgedrängt worden sind. Das ist leicht verständlich; denn hätte man nicht nur 2 oder 3 Druckstellen auf dem äußeren Rand angeordnet, sondern deren n, so wird für $n = \infty$ der Fall eines konstanten Radialdruckes verwirklicht und dann können diese Zuggebiete nicht mehr auftreten.

Schlußbemerkung: Nach Fertigstellung der vorliegenden Untersuchung wurde eine Arbeit von Herrn Z. Tuzi[1]) bekannt, in der eine Methode der kinematographischen Aufnahme von Linien gleicher Doppelbrechung mitgeteilt wird. Tuzi verwendet zirkularpolarisiertes Licht und unterwirft die zu untersuchende Scheibe während der kinematographischen Aufnahme allmählich wachsenden Drucken. Durch eine besondere Einrichtung der Apparatur ist die Möglichkeit gegeben, jeweils festzustellen, welche Drucke bei einem einzelnen Filmbild gewirkt haben. Es gelingt dadurch, die Ordnung der hellen und dunklen Streifen auszuzählen. In der Abb. 5c dieser Arbeit wird auch als Beispiel, ohne daß darauf näher eingegangen wird, ein Filmstreifen veröffentlicht, der die Verhältnisse unseres 1. Falles wiedergibt. Diese Bilder stimmen mit der von mir entworfenen Abb. 5 durchaus überein, abgesehen davon, daß durch die Interpolation, die bei meiner Zeichnung notwendig war, die Linienführung hier etwas unruhiger ist, als bei jenem photographischen Bild. Um den Sinn der Doppelbrechung zu bestimmen, muß jedoch auch Tuzi bei seinem Verfahren die Kompensatormethode anwenden. 967

Das rotationssymmetrische Ausbeulen axial gedrückter, freier Flanschenrohre.

Von **ERNST CHWALLA** in Wien.

Die folgenden Ausführungen behandeln die Stabilität axial gedrückter, vollkommen freier, an beiden Enden durch Flanschen verstärkter Rohre von Kreisquerschnitt und beziehen sich ausschließlich auf die achsensymmetrischen Ausbeulungsformen. Die Differentialbeziehung des verformten Mantels ist an die (später begründete) Voraussetzung der zylindrischen Schalenform im Zustand der kritischen, aus einer längs des Mittelkreises der Begrenzungsquerschnitte gleichmäßig aufgeteilten Druckkraft »$2\,r\,\pi\,p$« bestehenden Axiallast gebunden und soll gleich den Randbedingungen aus den strengen Grundgleichungen dünner, biegesteifer Schalen hergeleitet werden.

1. Die Differentialgleichung des Problems. Man denke sich aus der unter der kritischen Last stehenden Kreiszylinderschale an einer Stelle »A« der Schalen-Mittelfläche ein Element von den Seitenlängen »Eins« herausgeschnitten und betrachte dieses Element nun im verformten Zustand, in dem die Mittelfläche eine unendlich wenig abweichende, achsensymmetrische, ansonsten jedoch ganz allgemeine Form $w = f(x)$ angenommen hat (Abb. 1 u. 2). Der Punkt »A« besitzt in diesem Zustand eine Achsentfernung »$\bar{r}$« und die Normale der Mittelfläche schließt mit der Achse den Winkel ϑ ein; die Begrenzungsflächen $\bar{r} \cdot \delta\,\varphi \cdot d$ und $\varrho \cdot \delta\,\vartheta \cdot d$ des Elements (wobei »d« die Schalendicke vorstellt) werden sich nur unendlich wenig von der ursprünglichen Größe »$1 \cdot d$«, die Werte »$\bar{r}$« und ϑ nur unendlich wenig von r bzw. $\pi/2$ unterscheiden und die in den Begrenzungsflächen wirksamen spezifischen Spannungsresultanten S_1, N und Spannungsmomente G, G_1 sind ebenso wie die Meridiankrümmung $\frac{1}{\varrho} \to \frac{d^2 w}{d x^2}$ von der Größenordnung der Verformung »w«. Die Meridianschnitte

---

[1]) Scientific Papers of the Institute of Physical and Chemical Research Nr. 149, Volume 8, S. 247 bis 267. Tokyo, June 20, 1928.

sind aus Symmetriegründen schubspannungsfrei und »S_1« und »G_1« unveränderlich längs des Breitenkreises; »S« ist von der Größenordnung der Axiallast und vermag sich gleich »N« und »G« stetig längs des Meridians zu ändern. Die Gleichgewichtsbedingungen des Elements lauten allgemein

$$\left.\begin{aligned}\frac{d}{d\vartheta}(S\bar{r}\cdot\delta\varphi)\,\delta\vartheta - S_1\,\varrho\cdot\delta\vartheta\cdot\delta\varphi\cdot\cos\vartheta - N\bar{r}\cdot\delta\varphi\cdot\delta\vartheta = 0\\ \frac{d}{d\vartheta}(N\bar{r}\cdot\delta\varphi)\,\delta\vartheta + S_1\,\varrho\cdot\delta\vartheta\cdot\delta\varphi\cdot\sin\vartheta + S\bar{r}\cdot\delta\varphi\cdot\delta\vartheta = 0\\ \frac{d}{d\vartheta}(G\bar{r}\cdot\delta\varphi)\,\delta\vartheta - G_1\,\varrho\cdot\delta\vartheta\cdot\delta\varphi\cdot\cos\vartheta - N\bar{r}\cdot\delta\varphi\cdot\varrho\cdot\delta\vartheta = 0\end{aligned}\right\}\quad . \; . \; . \quad (1),$$

woraus sich nach Streichung aller jeweils von höherer Ordnung kleinen Produkte und Berücksichtigung von $\varrho\cdot d\,\vartheta\rightarrow dx$ die maßgebenden Bedingungsgleichungen

$$\frac{dS}{dx} = 0,\quad S = \text{konst.} = -p\,;\qquad \frac{dN}{dx} + \frac{S_1}{r} + S\cdot\frac{d^2 w}{d x^2} = 0\,;\qquad \frac{dG}{dx} - N = 0 \qquad (1\,\text{a})$$

ergeben. Die vier an das Hookesche Gesetz gebundenen »elastostatischen« Beziehungen für die der unendlich kleinen Verformung »w«

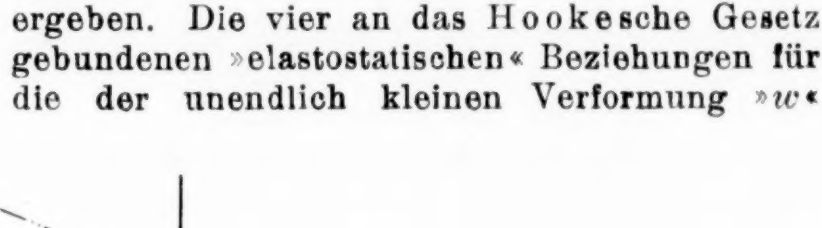


Abb. 1.

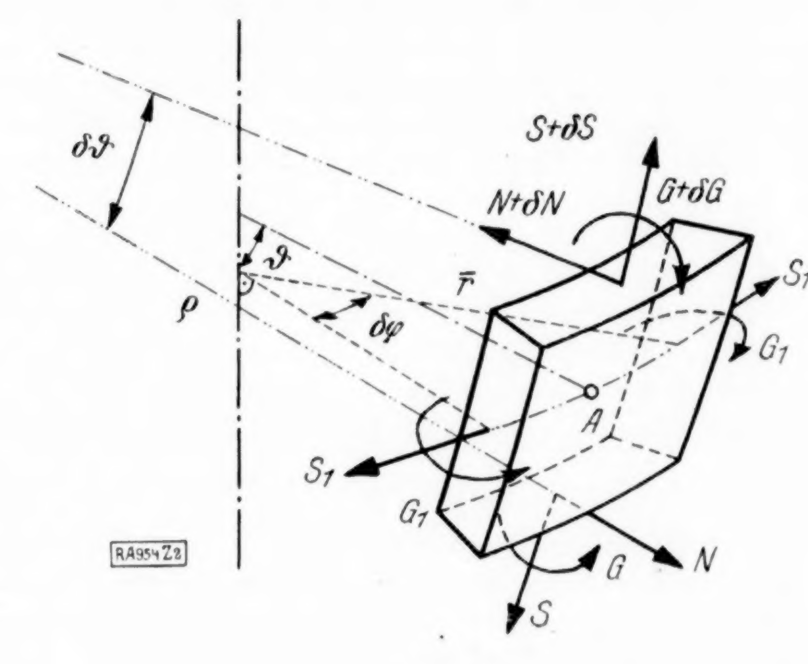


Abb. 2.

entspringenden Wirkungsgrößen S_1, G und G_1 lauten nach Streichung der von höherer Ordnung kleinen Glieder

$$S_1 = E\cdot d\cdot\varepsilon_1\,,\quad G = -D\left(\frac{d^2 w}{d x^2} - \nu\cdot\frac{\varepsilon_1}{r}\right)\quad\text{und}\quad G_1 = -D\left(\nu\cdot\frac{d^2 w}{d x^2} - \frac{\varepsilon_1}{r}\right)\quad (2),$$

wobei »E« den Modul, »ν« die Querdehnungszahl, $D = \frac{E\,d^3}{12\,(1-\nu^2)}$ die Schalensteifigkeit und $\varepsilon_1 = -\frac{w}{r}$ die spezifische Ringdehnung zufolge der Verformung »w« bedeutet; die beiden Gleichungen für die Spannungsmomente G, G_1 entsprechen hiebei einer genaueren Fassung des Schalenproblems, die die Verschiedenheit der Faserlänge im Bereich der Schalendicke in Rücksicht zieht und damit ein Zusatzglied gleicher Größenordnung gewinnt[1]).

Der ausbeulungsfreie Zustand unter der kritischen Last, auf den sich »w« bezieht, unterscheidet sich vom lastfreien durch das Bestehen der kleinen, einzig durch die Querdehnung als Folge der Axialbelastung »$2\,r\,\pi\,p$« verursachten Wirkungsgrößen $\varepsilon_1{}' \doteq \frac{\nu\,p}{E\,d}$, $G' \doteq D\cdot\frac{\nu\,\varepsilon_1{}'}{r}$ und $G_1{}' \doteq D\cdot\frac{\varepsilon_1{}'}{r}$; bei der Erfassung dieser Größen wurde vom geringfügigen Einfluß der Flanschen abgesehen (bzw. eine entsprechende Vorspannung angenommen), da für den ausbeulungsfreien kritischen Zustand einleitend die zylindrische Schalenform des Rohrmantels vorausgesetzt wurde und diese Voraussetzung erforderlich

[1]) Vergl. Th. Pöschl, Berechnung von Behältern, Berlin 1926. Die übliche Form der elastostatischen Gleichung für das Biegemoment läßt dieses unbeeinflußt von der Ringdehnung, was mit der hervorgerufenen Aenderung des Krümmungshalbmessers offenbar in Widerspruch steht.

erscheint, um vom exakten Standpunkt ein Stabilitätsproblem zu erhalten. Die auf diese Weise erhaltenen Werte der Stabilitätsgrenze sind dann identisch mit den »kritischen« Werten des Spannungsproblems, das bei einem Verzicht auf jene Voraussetzung vorliegt (vergl. hiezu R. v. Mises, diese Ztschr. 1923, S. 417 und auch J. W. Geckeler, diese Ztschr. 1928, S. 341).

Die Einführung der Beziehungen (2) in die Gleichgewichtsbedingungen (1a) liefert dann die Differentialgleichung

$$\frac{d^4 w}{d x^4} + \left(\frac{p}{D} + \frac{\nu}{r^2}\right) \cdot \frac{d^2 w}{d x^2} + \frac{E d}{D r^2} \cdot w = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3),$$

deren allgemeine Lösung

$$w = A_1 \cdot e^{+\alpha x} + A_2 \cdot e^{-\alpha x} + A_3 \cdot e^{+\beta x} + A_4 \cdot e^{-\beta x}, \quad \alpha, \beta = i \cdot \sqrt{\frac{\bar{p}}{2 D} \mp \sqrt{\left(\frac{\bar{p}}{2 D}\right)^2 - \frac{E d}{r^2 D}}} \quad . \quad (4)$$

lautet, wobei α, β die Wurzeln der charakteristischen Gleichung vorstellen und $\bar{p} = p + \frac{\nu}{r^2} \cdot D$ bedeutet. Die Herleitung der Differentialgleichung aus den allgemeinen Beziehungen rotationssymmetrischer Schalen vermochte gegenüber dem üblichen Darlegungsgang Zusatzglieder sowohl in den die Randbedingungen beeinflußenden Biegemomenten G, G_1 als auch bei der Axiallast »p« aufzuzeigen.

2. Die Randbedingungen des Problems. Die der Bestimmung der Integrationskonstanten dienenden vier Randbedingungen verlangen für die beiden Schalenränder das Verschwinden von Moment und Querkraft; die Momentenfreiheit wird gemäß Gl. (2) durch die Bedingungsgleichungen

$$x = \pm l, \quad \frac{d^2 w}{d x^2} + \frac{\nu}{r^2} \cdot w = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

zum Ausdruck gebracht und die Forderung nach verschwindenden Endquerkräften wird durch ein Gleichungspaar befriedigt, das für ein streifenförmiges, parallel zur Zylindererzeugenden heraus geschnitten gedachtes Rohrelement der Breite »Eins« im belasteten, verformten Zustand das Gleichgewicht bezüglich einer Verschiebung senkrecht zur Achse und einer Verdrehung gewährleistet. Wie man den Abb. 1 und 2 entnehmen kann, wirkt auf ein derartiges Schalenelement außer der Axialkraft »p« eine stetige Verteilung des radialen Widerstandes $S_1 \cdot \varrho \cdot \delta \vartheta \cdot \delta \varphi \rightarrow \frac{S_1}{r} = -\frac{E d}{r^2} \cdot w$ und zusätzlich der an den beiden Endpunkten des Streifens konzentrierte, radial gerichtete Verschiebungswiderstand der Flanschen »$W \cdot w_{+l}$« und »$W \cdot w_{-l}$«, wobei »W« den spezifischen Flanschwiderstand bedeutet. Die beiden Gleichgewichtsbedingungen lauten, wie aus Abb. 1 leicht abzulesen ist,

$$\left.\begin{aligned} &\frac{E d}{r^2} \cdot \int_{-l}^{+l} w \, d x + W \left(w_{+l} + w_{-l}\right) = 0, \\ &\frac{E d}{r^2} \cdot \int_{-l}^{+l} w \, x \, d x + W l \left(w_{+l} - w_{-l}\right) - p \left(w_{+l} - w_{-l}\right) = 0 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (6)$$

und stellen im Verein mit dem Bedingungspaar (5) die vier Randbedingungsgleichungen des Problems vor, die nach Einführung der allgemeinen Lösung (4) und Zuziehung der Hilfsgrößen $\varrho = e^{+\alpha l}$, $\sigma = e^{+\beta l}$ die Form

$$\left.\begin{aligned} &A_1 \cdot \left(\alpha^2 + \frac{\nu}{r^2}\right) \cdot \varrho + A_2 \cdot \left(\alpha^2 + \frac{\nu}{r^2}\right) \cdot \frac{1}{\varrho} + A_3 \cdot \left(\beta^2 + \frac{\nu}{r^2}\right) \cdot \sigma + A_4 \cdot \left(\beta^2 + \frac{\nu}{r^2}\right) \cdot \frac{1}{\sigma} = 0 \\ &A_1 \cdot \left(\alpha^2 + \frac{\nu}{r^2}\right) \cdot \frac{1}{\varrho} + A_2 \cdot \left(\alpha^2 + \frac{\nu}{r^2}\right) \cdot \varrho + A_3 \cdot \left(\beta^2 + \frac{\nu}{r^2}\right) \cdot \frac{1}{\sigma} + A_4 \cdot \left(\beta^2 + \frac{\nu}{r^2}\right) \cdot \sigma = 0 \\ &A_1 \cdot \left[\frac{1}{\alpha} \cdot \left(\varrho - \frac{1}{\varrho}\right) + \frac{W r^2}{E d} \cdot \left(\varrho + \frac{1}{\varrho}\right)\right] + A_2 \cdot \left[\,'/.\,\right] + A_3 \cdot \left[\frac{1}{\beta}\left(\sigma - \frac{1}{\sigma}\right) + \right. \\ &\qquad \left. + \frac{W r^2}{E d} \cdot \left(\sigma + \frac{1}{\sigma}\right)\right] + A_4 \cdot \left[\,:/:\,\right] = 0 \\ &A_1 \cdot \left\{\frac{l}{\alpha}\left(\varrho + \frac{1}{\varrho}\right) - \left(\varrho - \frac{1}{\varrho}\right) \cdot \left[\frac{1}{\alpha^2} + \frac{r^2 (p - W l)}{E d}\right]\right\} - A_2 \cdot \left\{\,'/\,\right\} + \\ &\qquad + A_3 \cdot \left\{\frac{l}{\beta}\left(\sigma + \frac{1}{\sigma}\right) - \left(\sigma - \frac{1}{\sigma}\right) \cdot \left[\frac{1}{\beta^2} + \frac{r^2 \cdot (p - W l)}{E d}\right]\right\} - A_4 \cdot \left\{\,:/:\,\right\} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

annehmen.

Die Flanschen selbst sind etwa als Kreisringe von Rechteckquerschnitt aufzufassen, die um die dünne Zylinderschale gelegt sind, eine Höhe $(r_2 - r_1)$ und eine Dicke »d_1« besitzen (Abb. 1); denkt man sich nun diesen Ring an seiner Innenleibungsfläche radial gleichmäßig mit der Intensität »Eins« belastet und die entspringende Radiusvergrößerung »Δ_1« der Innenleibung berechnet, so kann mit Rücksicht auf die Kleinheit der Rohrwandstärke das »W« unmittelbar dem Werte »$1 \cdot d_1 / \Delta_1$« gleichgesetzt werden. Bedeutet »a« den Radialabstand eines Ringelementes, »Δ« die Radialverschiebung und »σ_a, σ_t« die radiale bzw. tangentiale Spannung, so erhält man für einen derartigen Belastungsfall, der bekanntlich einen exakten ebenen Spannungszustand liefert, die Gleichgewichtsbedingung $\frac{d\,(a\,\sigma_a)}{d\,a} - \sigma_t = 0$ und die elastostatischen Beziehungen

$$\sigma_a = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \left(\frac{d\,\Delta}{d\,a} + \nu\,\frac{\Delta}{a}\right), \qquad \sigma_t = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \left(\frac{\Delta}{a} + \nu\,\frac{d\,\Delta}{d\,a}\right).$$

Es resultiert die allgemeine Lösung $\Delta = C_1 \cdot a + C_2 \cdot \frac{1}{a}$, die nach Befriedigung der Randbedingungen $a = r_1$, $\sigma_a = -1$ und $a = r_2$, $\sigma_a = 0$ auf den Verlauf von »Δ« und damit auch auf den Sonderwert »Δ_1« an der Stelle $a = r_1$ führt und für den gesuchten spezifischen Flanschwiderstand die Beziehung

$$W = \frac{1 \cdot d_1}{\Delta_1} = \frac{d_1 \cdot E}{r_1} \cdot \frac{r_2^2 - r_1^2}{r_1^2 \cdot (1-\nu) + r_2^2 \cdot (1+\nu)} \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

ergibt.

3. Die „Knickbedingung". Die Knickbedingung verlangt nun das Verschwinden der Nennerdeterminante von (7) und zerfällt wegen der vorhandenen Symmetrie der Anlage und Belastung in zwei verschiedene Bedingungsgleichungen, denen zwei grundsätzlich verschiedene, durch vorhandene und fehlende Symmetrie zur Ordinatenachse (Abb. 1) gekennzeichnete Gruppen von Deformationsfiguren der Meridianlinie zugeordnet sind.

Für die Gruppe der zur Ordinatenachse symmetrischen Lagen gelten, wie schon aus der Forderung $w_{+l} = w_{-l}$ zu folgern ist, die Beziehungen $A_1 = A_2$ und $A_3 = A_4$, deren Einführung in (7) zwei Bedingungsgleichungen liefert; aus dem Verschwinden der Nennerdeterminante dieses Gleichungspaares folgt die Knickbedingung, die explizit in Form des für eine vorgegebene Axialbelastung »p« kritischen spezifischen Flanschenwiderstandes

$$W = \frac{D\,\alpha\,\beta}{\beta^2 - \alpha^2} \cdot \frac{\left(\alpha^2 + \frac{\nu}{r^2}\right) \cdot \alpha \cdot \mathfrak{Cos}\,\alpha\,l \cdot \mathfrak{Sin}\,\beta\,l - \left(\beta^2 + \frac{\nu}{r^2}\right) \cdot \beta \cdot \mathfrak{Cos}\,\beta\,l \cdot \mathfrak{Sin}\,\alpha\,l}{\mathfrak{Cos}\,\alpha\,l \cdot \mathfrak{Cos}\,\beta\,l} \quad . \quad (9)$$

angeschrieben werden kann; solange demnach das vorhandene »W« Gl. (8) größer ist als dieser kritische Wert, besteht unter der in Rechnung gestellten Last »p« keine Ausbeulgefahr. Für die Gruppe der zur Ordinatenachse asymmetrischen Deformationsfiguren verlangt die erforderliche Polarsymmetrie bezüglich des Koordinatenursprungs die Beziehungen $A_1 = -A_2$ und $A_3 = -A_4$, deren Einführung in (7) wieder zwei Bedingungsgleichungen liefert; die dem Nullsetzen der Nennerdeterminante dieses Gleichungspaares entspringende Knickbedingung dieser Gruppe kann dann nach einigen Umformungen auf die zu (9) analoge Form

$$W = \frac{D\,\alpha\,\beta}{\beta^2 - \alpha^2} \cdot \frac{\left(\alpha^2 + \frac{\nu}{r^2}\right) \cdot \alpha \cdot \mathfrak{Sin}\,\alpha\,l \cdot \mathfrak{Cos}\,\beta\,l - \left(\beta^2 + \frac{\nu}{r^2}\right) \cdot \beta \cdot \mathfrak{Sin}\,\beta\,l \cdot \mathfrak{Cos}\,\alpha\,l}{\mathfrak{Sin}\,\alpha\,l \cdot \mathfrak{Sin}\,\beta\,l} \quad . \quad (10)$$

gebracht werden. Nun ist es formal noch erforderlich, nach dem Auftreten reeller, mehrfacher und komplexer Wurzeln (4) der charakteristischen Gleichung, also nach den Möglichkeiten $\bar{p} \gtreqless \frac{2}{r} \cdot \sqrt{E\,D\,d}$ [vergl. Gl. (19)] zu unterscheiden.

a) Der Fall reeller Wurzeln, $\bar{p} > \frac{2}{r} \cdot \sqrt{E\,D\,d}$: Führt man, wie es sich als zweckmäßig erweist, die Hilfsgrößen

$$\gamma, \delta = \sqrt{\frac{\bar{p}}{4\,D}} \pm \sqrt{\frac{E\,d}{4\,r^2\,D}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

ein, so gilt $\alpha, \beta = i \cdot (\gamma \mp \delta)$ und man erhält für die beiden Knickbedingungen (9, 10) nach einigen Umformungen und Beachtung von $L = 2\,l$ die einzig durch die Vorzeichen unterschiedenen Gleichungen

$$W = \frac{\sqrt{E\,D\,d}}{r} \cdot \frac{\left[\left(\frac{\bar{p}}{4\,D} - \frac{\nu}{2\,r^2}\right)\frac{1}{\delta} + \delta\right] \cdot \sin\delta\,L \mp \left[\left(\frac{\bar{p}}{4\,D} - \frac{\nu}{2\,r^2}\right)\frac{1}{\gamma} + \gamma\right] \cdot \sin\gamma\,L}{\cos\delta\,L \pm \cos\gamma\,L} \quad . \quad (12).$$

Die oberen Vorzeichen beziehen sich hierbei auf die Gruppe der symmetrischen, die unteren auf die der asymmetrischen Meridianverformungen und der größere der erhaltenen beiden Werte ist maßgebend.

b) Der Fall der Doppelwurzel, $\bar{p} = \frac{2}{r} \cdot \sqrt{E D d}$: Für die beiden Hilfsgrößen (11) gilt in diesem Sonderfall $\gamma \to \gamma' = \sqrt{\frac{\bar{p}}{2 D}}$, $\delta \to 0$ und man erhält aus (12) durch Grenzwertbildung unmittelbar die Knickbedingungen in der Form

$$W = \frac{E d}{2 r^2 \gamma'} \cdot \frac{\left(1 - \frac{\nu}{r^2 \gamma'^2}\right) \cdot \gamma' \cdot L \mp \left(3 - \frac{\nu}{r^2 \gamma'^2}\right) \cdot \sin \gamma' L}{1 \pm \cos \gamma' L} \quad \ldots \quad (13).$$

c) Der Fall komplexer Wurzeln, $\bar{p} < \frac{2}{r} \sqrt{E D d}$: Die Einführung der reellen Hilfsgrößen

$$\gamma_1, \delta_1 = \sqrt{\sqrt{\frac{E d}{4 r^2 D}} \pm \frac{\bar{p}}{4 D}} = \gamma, i \delta \quad \ldots \ldots \quad (14)$$

in Gl. (12) liefert für den unter einer bestimmten Axiallast »$\bar{p}$« kritischen spezifischen Flanschenwiderstand unmittelbar die Beziehung

$$W = \frac{\sqrt{E D d}}{r} \cdot \frac{\left[\left(\frac{\bar{p}}{4 D} - \frac{\nu}{2 r^2}\right) \frac{1}{\delta_1} - \delta_1\right] \cdot \mathfrak{Sin}\, \delta_1 L \mp \left[\left(\frac{\bar{p}}{4 D} - \frac{\nu}{2 r^2}\right) \cdot \frac{1}{\gamma_1} + \gamma_1\right] \cdot \sin \gamma_1 L}{\mathfrak{Cof}\, \delta_1 L \pm \cos \gamma_1 L} \quad (15),$$

wobei sich wieder die oberen Vorzeichen auf die zur Ordinatenachse symmetrischen, die unteren auf die zum Ursprung polarsymmetrischen Meridianverformungen beziehen und der größere der beiden erhaltenen W-Werte maßgebend ist.

4. Die Sonderfälle $W = 0$ und $W = \infty$. Wird, wie es $r_2 = r_1$ in Gl. (8) entspricht (vergl. Abb. 1), der spezifische Flanschwiderstand $W = 0$, so verschwinden die linken Seiten der Gl. (9, 10) bzw. (12, 13, 15) und man erhält im Sinne die Herleitung in Form der Null gesetzten Zählerausdrücke

$$\left.\begin{aligned} &\left[\left(\frac{\bar{p}}{4 D} - \frac{\nu}{2 r^2}\right) \cdot \frac{1}{\delta} + \delta\right] \cdot \sin \delta L \mp \left[\left(\frac{\bar{p}}{4 D} - \frac{\nu}{2 r^2}\right) \cdot \frac{1}{\gamma} + \gamma\right] \cdot \sin \gamma L = 0 \\ &\left(1 - \frac{\nu}{r^2 \gamma'^2}\right) \cdot \gamma' \cdot L \mp \left(3 - \frac{\nu}{r^2 \gamma'^2}\right) \cdot \sin \gamma' L = 0 \\ &\left[\left(\frac{\bar{p}}{4 D} - \frac{\nu}{2 r^2}\right) \cdot \frac{1}{\delta_1} - \delta_1\right] \cdot \mathfrak{Sin}\, \delta_1 L \mp \left[\left(\frac{\bar{p}}{4 D} - \frac{\nu}{2 r^2}\right) \cdot \frac{1}{\gamma_1} + \gamma_1\right] \cdot \sin \gamma_1 L = 0 \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

die den Kriterien $\bar{p} \gtreqless \frac{2}{r} \sqrt{E D d}$ zugeordneten strengen Knickbedingungen für das achsensymmetrische Ausbeulen einer axial gedrückten, vollkommen freien Zylinderschale. Die im Rahmen des Abschnitts **1** für den ausbeulungsfreien kritischen Zustand vorausgesetzte zylindrische Schalenform wird hier mit Schärfe angenommen, so daß diesem Sonderfall ein exaktes Stabilitätsproblem zugrunde liegt.

Wächst die Flanschbreite $(r_2 - r_1)$ unbeschränkt an, so strebt der spezifische Flanschwiderstand gemäß Gl. (8) einem endlichen Grenzwert ${}_{\max} W = \frac{d_1 E}{r_1 (1 + \nu)}$ zu und die Knickbedingungen (12, 13, 15) bleiben als solche unverändert in Geltung. Erfahren jedoch die beiden Schalenränder eine unverschiebliche, die freie Verdrehbarkeit gewährleistende Lagerung, dann ist das zweite Sonderproblem $W = \infty$ realisiert, dessen Knickbedingung im Sinne der Herleitung unmittelbar aus dem Verschwinden der Nennerausdrücke der Gl. (9, 10) in der Form

$$\alpha \text{ oder } \beta = \pm \frac{i z \pi}{L}, \quad z = 1, 2, 3, \ldots \quad \ldots \ldots \quad (17)$$

erhalten wird und nach Einführung in die charakteristische Gleichung (4) für die kritische Axiallast »$\bar{p}$« die Beziehung

$$\bar{p} = p + \frac{\nu}{r^2} \cdot D = \frac{z^2 \pi^2 D}{L^2} + \frac{E d}{r^2} \cdot \frac{L^2}{z^2 \pi^2} = \text{Min.} \, (z = 1, 2, 3, \ldots) \quad \ldots \quad (18)$$

liefert[1]). Läßt man für »z«, das identisch ist mit der Halbwellenzahl der sich ausbildenden Deformationsfigur der Zylindererzeugenden, näherungsweise auch Dezimalwerte zu, so resultiert aus (18) als absolutes Extrem die Beziehung

$$\bar{p} = \frac{2}{r}\sqrt{E\,D\,d} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (19),$$

die den im Abschnitt **3** zugezogenen Kriterien der Wurzelarten eine sinnfällige Bedeutung gibt. Mit $\nu = 3/10$ liefert diese Formel $\bar{p} = 0{,}606 \cdot \frac{E d^2}{r}$ und läßt die Bedeutungslosigkeit des Zusatzgliedes $\frac{\nu}{r^2} \cdot D = 0{,}027 \frac{d}{r} \cdot \frac{E d^2}{r} = \bar{p} - p$ erkennen.

5. Die Moduli. Mit Beziehung auf das Eisen als zugrunde gelegter Werkstoff gilt im kritischen Zustand des »unelastischen« Knickbereiches (streng jedoch nur unter der im Abbschnitt **1** dargelegten Voraussetzung) das Kármánsche Knickspannungsbild, so daß im Rahmen der Schalensteifigke t »D« der Elastizitätsmodul allgemein durch den Knickmodul »T« zu ersetzen ist. Wird der »unelastischen« Knickspannung eines beiderseits gelenkig gelagerten Druckstabes vom Schlankheitsgrad »$\varLambda$« und dem gleichen Materiale die übliche Beziehung $\sigma_K = K_1 - K_2 \cdot \varLambda$ zugeordnet, dann gilt

$$T = \frac{\sigma_K \cdot (K_1 - \sigma_K)^2}{\pi^2 \cdot K_2^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (20),$$

wobei »σ_K« die kritische Axialspannung »p/d« bedeutet. Der in den Knickbedingungen frei vorkommende, der Ringdehnung der Schale angehörende Modul »E« ist offenbar angenähert durch die örtliche Ableitung $E_1 = \left.\frac{d\sigma}{d\varepsilon}\right|_{\sigma = \sigma_K}$ der Spannung nach der spezifischen Längenänderung (Tangentenrichtung der Arbeitslinie) zu ersetzen, da nach den Züricher Versuchsergebnissen[2]) die Quasi-Isotropie des Materials auch im plastischen Bereich erhalten bleibt und dieser Modul erst im Zustand des Ausbeulens zur Geltung kommt. Der Elastizitätsmodul in Beziehung (8) wird von der Axialbelastung nicht unmittelbar beeinflußt und bleibt daher unverändert erhalten. 954

Über Randwertaufgaben für die elastische Halbebene und über die geschlitzte elastische Vollebene.

Von **MICHAEL SADOWSKY** in Berlin-Charlottenburg.

1. In einer Arbeit[3]) habe ich die Singularitätenmethode zur Lösung folgender Randwertaufgabe für die untere Halbebene $y \leqq 0$ herangezogen: es handelt sich um das »ebene Verschiebungsproblem«

$$u = u(x, y), \qquad v = v(x, y), \qquad w = 0;$$

der Rand $y = 0$ der Halbebene ist überall frei von Schubspannungen; vorgeschrieben sind die Werte des Normaldruckes $p(x)$ auf dem Rande. Für die Verschiebungen habe ich die Ausdrücke

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{1}{8\pi g}\int_{-\infty}^{+\infty} p(t)\left\{-4(1-2\sigma)\,\operatorname{arctg}\frac{y}{x-t} - \frac{4(x-t)\,y}{(x-t)^2+y^2}\right\}dt \\ v &= \frac{1}{8\pi g}\int_{-\infty}^{+\infty} p(t)\left\{4(1-\sigma)\ln\left[(x-t)^2+y^2\right] - \frac{4\,y^2}{(x-t)^2+y^2}\right\}dt \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (1)$$

aufgestellt[3]), mit der Bemerkung, daß man beweisen kann, daß diese durch formale Integration gewonnene Lösung die richtigen Randwerte tatsächlich und stetig annimmt. Diesen

[1]) Dieser Sonderfall wurde für sich schon behandelt (vergl. H. Lorenz, Technische Elastizitätslehre, 1913, p. 596 oder A. u. L. Föppl, Drang und Zwang II, p. 383). R. Lorenz hat für diesen Sonderfall auch das asymmetrische Ausbeulen untersucht (Phys. Ztschr. Bd. 12, S. 241), das die kleinste unter den »kritischen« Lasten lieferte und wohl auch beim freien Rohr liefern dürfte.

[2]) Roš-Eichinger, Versuche zur Klärung der Frage der Bruchgefahr, Zürich 1926. (Schweiz. Verband für die Materialprüfungen der Technik).

[3]) Diese Zeitschr. Bd. 8 (1928), Heft 2, S. 110.

noch fehlenden Beweis will ich hier anführen, um nachher einige Fälle explizit zu behandeln. Von $p(x)$ wird abteilungsweise Stetigkeit vorausgesetzt. Für die weiteren Berechnungen braucht man die Integrale

$$\left.\begin{aligned}
&\int \frac{dz}{(1+z^2)^2} = \frac{z}{2(1+z^2)} + {}^1/_2 \operatorname{arctg} z, && \int_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{2} \\
&\int \frac{z\,dz}{(1+z^2)^2} = -\frac{1}{2(1+z^2)}, && \int_{-\infty}^{+\infty} = 0, \\
&\int \frac{z^2\,dz}{(1+z^2)^2} = -\frac{z}{2(1+z^2)^2} = {}^1/_2 \operatorname{arctg} z, && \int_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

2. Aus Gl. (1) bekommt man für die Spannungskomponenten

$$\left.\begin{aligned}
X_x = -\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} p(x-\xi y)\frac{\xi^2\,d\xi}{(1+\xi^2)^2}, \qquad X_y = -\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} p(x-\xi y)\frac{\xi\,d\xi}{(1+\xi^2)^2}, \\
Y_y = -\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} p(x-\xi y)\frac{d\xi}{(1+\xi^2)^2}
\end{aligned}\right\} \quad (3).$$

Der Integrationsparameter ξ ist für $\frac{x-t}{y}$ eingeführt, bei der Bestimmung der Integrationsgrenzen für ξ ist insbesondere zu beachten, daß $y < 0$ ist.

Um zu zeigen, daß mit $y \to 0$ wirklich $Y_y \to -p(x)$ geht, spalte man zunächst $-p(x)$ ab:

$$Y_y = -p(x) - \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} [p(x-\xi y) - p(x)]\frac{d\xi}{(1+\xi^2)^2}.$$

Das letztere Integral kann man in 3 Teile zerlegen, die mit A, B, C bezeichnet werden:

$$\begin{aligned}
\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \ldots = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{-\Omega} \ldots &+ \frac{2}{\pi}\int_{-\Omega}^{+\Omega} \ldots + \frac{2}{\pi}\int_{\Omega}^{+\infty} \ldots \quad (\Omega > 0) \\
= A \qquad &+ B \qquad + C.
\end{aligned}$$

Nun wollen wir unter Benutzung von (2) die Summe $A + C$ abschätzen:

$$\begin{aligned}
|A + C| &\leq \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{-\Omega} M \frac{d\xi}{(1+\xi^2)^2} + \frac{2}{\pi}\int_{\Omega}^{\infty} M \frac{d\xi}{(1+\xi^2)^2} \\
&\leq \frac{2}{\pi}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} M \frac{d\xi}{(1+\xi^2)^2} - \int_{-\Omega}^{+\Omega} M \frac{d\xi}{(1+\xi^2)^2}\right\} \\
&\leq \frac{2M}{\pi}\left\{\frac{\pi}{2} - \int_{-\Omega}^{+\Omega} \frac{d\xi}{(1+\xi^2)^2}\right\},
\end{aligned}$$

dabei ist M eine obere Schranke für die Differenz $|p(x_1) - p(x_2)|$ im gesamten Bereich $-\infty$ bis $+\infty$. Bei dieser Beweisführung wird also ein beschränktes $p(x)$ vorausgesetzt. Soll $|A + C| \leq \varepsilon/2$ gemacht werden, wobei ε eine positive, sonst beliebige kleine vorgeschriebene Zahl ist, so genügt dazu, auf Grund von (2)

$$\Omega \geq \Omega_0(\varepsilon) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

zu wählen.

Eine Abschätzung für $|B|$ ergibt

$$|B| \leq \frac{2}{\pi}\int_{-\Omega_0(\varepsilon)}^{+\Omega_0(\varepsilon)} M' \frac{d\xi}{(1+\xi^2)^2} < M',$$

wobei M' eine obere Schranke für $p(x-\xi y)-p(x)$ im Intervall $x-\Omega y \ldots x-\xi y \ldots x+\Omega y$ ist. Wenn x eine Stetigkeitsstelle von $p(x)$ ist, so kann auch $|B|$ kleiner als $\varepsilon/2$ gemacht werden, dazu muß man

$$|\Omega y| \leq \alpha(\varepsilon) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (5)$$

wählen. Dividieren wir die Ungl. (5) durch die Ungl. (4), so erhalten wir

$$|y| \leq \frac{\alpha(\varepsilon)}{\Omega_0(\varepsilon)} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (6)$$

und somit ist mit $|y_0(\varepsilon)| = \frac{\alpha(\varepsilon)}{\Omega_0(\varepsilon)}$ eine obere Schranke für $|y| = -y$ gefunden, von der Art, daß für sämtliche $|y| \leq |y_0|$ die Differenz $|Y_y(x,y)+p(x)|$ kleiner als ein beliebiges kleines positives ε bleibt, wenn nur $p(x)$ an der Stelle x stetig und sonst beschränkt ist. Damit ist der Beweis erbracht, daß unter den erwähnten Voraussetzungen die Randwerte von Y_y stetig angenommen werden.

Der Beweis bezüglich der Randwerte der Schubspannung X_y geschieht nach demselben Verfahren und braucht hier nicht angegeben zu werden.

Wenn nun der Druck $p(x)$ nicht beschränkt ist, so muß vor allem die Bedingung erfüllt sein, daß das Integral $\int |p(x)|\, dx$, über eine singuläre Stelle erstreckt, existiere. Denn dieses Integral stellt eine Druckkraft dar und muß demnach endlich sein. In diesem Falle wird man die Abschätzungsmethode dahin verfeinern müssen, daß man die singulären Gebiete besonders ins Auge faßt und durch Anwendung der Mittelwertsätze nachweist, daß die Annäherung an die Randwerte eine stetige bleibt.

3. Ein allgemeiner Satz. Für den Rand einer nur durch Normaldrucke belasteten Halbebene ergibt sich aus der Gl. (3) die Beziehung

$$X_x = -p(x)$$

d. h. m. a. W. auf dem Rande sind die beiden Spannungen Y_y und X_x gleich groß.

Zum Beweise hat man das X_x entsprechende Integral ähnlich wie in **1** in 3 Teile zu zerlegen und bei der Abschätzung die Formeln (2) zu benutzen.

Bei der Anwendung dieses Satzes sollte man nicht vergessen, daß immer noch eine Superposition mit dem Spannungszustande

$$X_x = \text{konst.}, \qquad Y_y = 0, \qquad X_y = 0$$

möglich bleibt. Diese Superposition ist manchmal auch wirklich nötig, z. B. wenn es sich um die Erfüllung einiger Grenzbedingungen im Unendlichen handelt (vergl. z. B. den Fall der geschlitzten Vollebene unter 6). Durch diese Superposition werden dann auch die Randwerte von X_x entsprechend abgeändert.

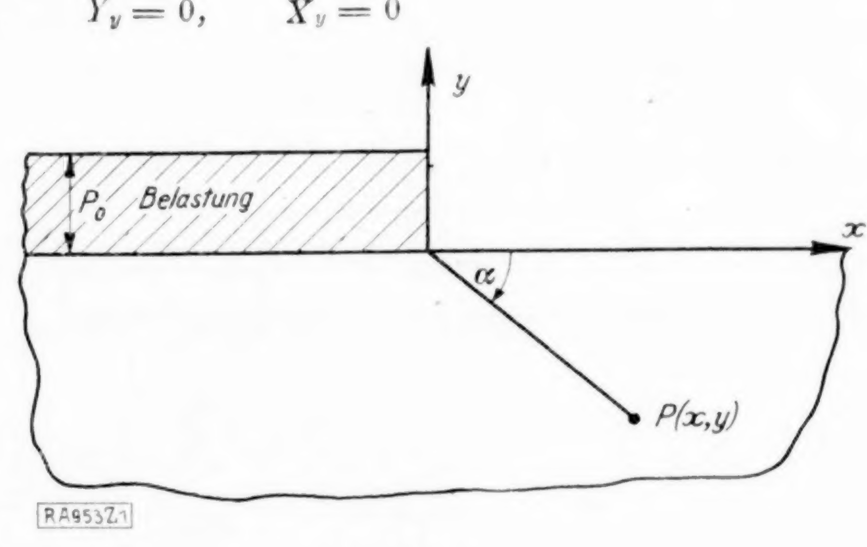


Abb. 1.

4. Um das Verhalten der Spannungskomponenten bei einer Annäherung an eine Unstetigkeitsstelle von $p(x)$ zu untersuchen, betrachten wir den Belastungsfall

$$p(x) = p_0 \text{ für } x < 0 \quad \text{und} \quad p(x) = 0 \text{ für } x > 0$$

(Abb. 1).

Auf Grund der Gl. (2) und (3) ermitteln wir für einen inneren Punkt (x, y) $(y < 0)$

$$X_x = \frac{p_0}{\pi}(-\alpha - {}^1/_2 \sin 2\alpha), \quad Y_y = \frac{p_0}{\pi}(-\alpha + {}^1/_2 \sin 2\alpha), \quad X_y = \frac{p_0}{\pi}\sin^2\alpha \quad . \quad (7)$$

Aus diesen Ausdrücken erkennt man vor allem die Richtigkeit der Randwerte an den Stetigkeitsstellen von $p(x)$. An der Stelle $x = 0$, die eine Unstetigkeitsstelle ist, ist $\lim\limits_{y\to 0} Y_y$ selbstverständlich überhaupt nicht vorhanden, da aber Y_y eine Funktion von α ist, so gibt es einen $\lim\limits_{y\to 0} Y_y(\alpha)$. Man erkennt aber, daß die einfache »Interpolation nach dem Winkel α«, wie sie bei den Randwertaufgaben der Potentialtheorie an Unstetigkeits-

stellen zutrifft, hier nicht stattfindet. Es treten vielmehr zusätzliche Glieder, wie z. B. $\frac{1}{2} \sin 2\alpha$ usw. auf. Diese Erscheinung ist auch erklärlich, wenn man bedenkt, daß die Spannungskomponenten im allgemeinen keine harmonischen, sondern biharmonische Funktionen sind.

5. Der Fall einer unteren Halbebene, die auf der Strecke $-a \ldots x \ldots +a$ durch eine Last von konstanter spezifischer Belastung p_0 beansprucht wird, läßt sich mit Hilfe der hier angegebenen Methode ohne Schwierigkeiten durchrechnen (Abb. 2). Für die Spannungen erhält man

$$\left.\begin{aligned} X_x &= \frac{p_0}{\pi}\left(\frac{\sin 2\alpha_1 - \sin 2\alpha_2}{2} - \beta\right), \qquad X_y = \frac{p_0}{\pi}(\sin^2\alpha_2 - \sin^2\alpha_1), \\ Y_y &= \frac{p_0}{\pi}\left(\frac{\sin 2\alpha_2 - \sin 2\alpha_1}{2} - \beta\right) \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (8).$$

Mit diesem Fall beschäftigt sich auch Riedel[1]).

6. Geschlitzte Vollebene. Zum Abschluß werde noch folgender Fall behandelt: eine von $x = -a$ bis $x = a$ geradlinig aufgeschlitzte Vollebene werde durch einen im Unendlichen homogenen Zug

$$Y_y = -p_\infty > 0, \qquad X_y = 0, \qquad X_x = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (9)$$

beansprucht. Zu untersuchen ist der Einfluß des Schlitzes auf die Spannungsverteilung.

Wir denken uns eine Trennungsfläche

$$y = 0, \qquad |x| \geqq a,$$

die die geschlitzte Vollebene in 2 Halbebenen trennt. Betrachten wir nun die untere Halbebene, so können wir ihren Spannungs- bzw. Deformationszustand wie folgt definieren: der Rand der unteren Halbebene ist überall frei von Schubspannungen; für $|x| \geqq a$ gilt $v = 0$, für $|x| < a$ $Y_y = 0$ als Randbedingung. Diese sog. »wesentlich-gemischte Randwertaufgabe« läßt sich mit Hilfe von funktionentheoretischen Mitteln behandeln[2]), die Verteilung des Randdruckes erfolgt nach dem Gesetz

$$p = p_\infty \frac{|x|}{\sqrt{x^2 - a^2}} (|x| > a) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (10).$$

Die Gl. (3), superponiert mit

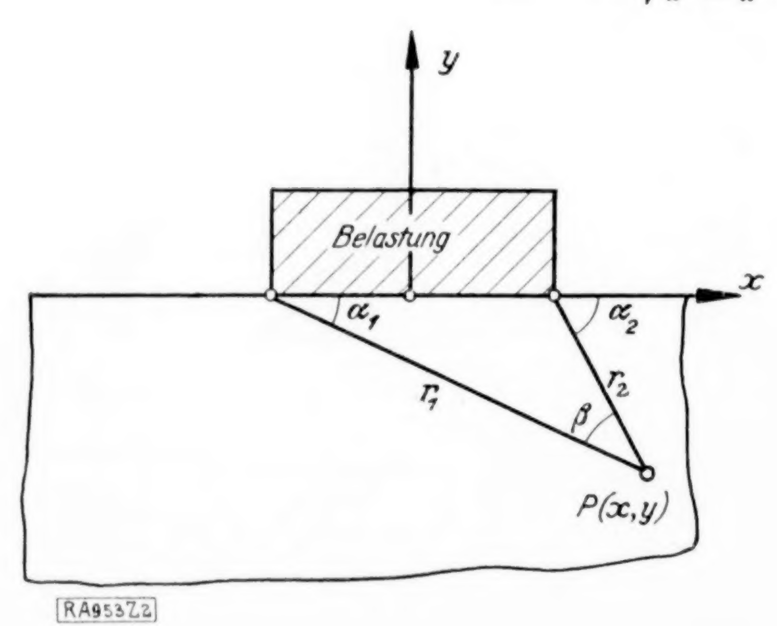


Abb. 2.

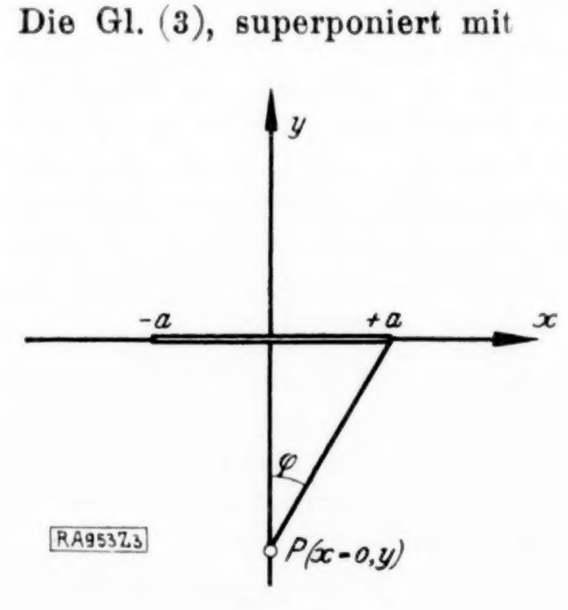


Abb. 3.

$$X_x = p_\infty, \qquad Y_y = 0, \qquad X_y = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (11),$$

gibt dann den Spannungszustand. Die Superposition des Zustandes (11) ist auf Grund des Satzes 2 nötig, um die Bedingungen (9) für das Unendlichferne zu erfüllen.

Aus der Gl. (10) erkennt man, daß $\lim\limits_{|x| \to a} |p| = \infty$ ist; das heißt, daß für die physikalisch richtige Behandlung der Aufgabe die Elastizitätstheorie allein nicht ausreicht, es muß vielmehr die Plastizitätstheorie mit herangezogen werden. (Wenn man etwa annimmt,

[1]) Diese Zeitschr. Bd. 7 (1927), Heft 3, S. 179.
[2]) Diese Zeitschr. Bd. 8 (1928), Heft 2, S. 113.

daß p_∞ als zulässige Spannung 0,1 der Fließbelastung ausmacht, dann ist für den Bereich $a < |x| < 1{,}005\, a\ (y = 0)$ die Fließgrenze überschritten.)

Die allgemeine Durchführung der Integrationen in (3) bei dem $p(x)$ aus der Gl. (10) führt zu längeren Ausdrücken. Für die Symmetrielinie $x = 0$ hat man, unter Berücksichtigung der Superposition (11) folgende Spannungswerte (Abb. 3):

$$X_x = p_\infty (1 - \cos \varphi - \cos \varphi \sin^2 \varphi), \qquad Y_y = - p_\infty \cos^3 \varphi, \qquad X_y = 0.$$

Für den Schlitz $y = 0\ |x| < a$ gilt nach der Superposition

$$X_x = p_\infty < 0, \qquad Y_y = 0, \qquad X_y = 0,$$

d. h. daß im Schlitz eine Längsspannung $X_x = p_\infty$ als Druck auftritt.

Als Grenzfall eines elliptischen Loches ist der Schlitz von Pöschl[1]) kurz gestreift worden. 953

Zur numerischen Integration von Differentialgleichungen.

Von **R. v. MISES** in Berlin.

Das weitaus bequemste Verfahren zur rechnerischen Ermittlung des Integrals einer gewöhnlichen Differentialgleichung ist das Verfahren fortlaufender Extrapolation, das, wie es scheint[2]), zum ersten Mal von J. C. Adams 1883 angegeben wurde. Namentlich dann, wenn der Anfang einer Integralkurve schon bekannt ist und es sich darum handelt, ihren weiteren Verlauf möglichst rasch zu berechnen, ist das Adamssche Verfahren jedem andern bedeutend überlegen. Wenn es gleichwohl nicht genügend allgemein angewandt wird und, besonders in Deutschland, gegenüber den von Runge, Heun und Kutta entwickelten Methoden zurücktritt, so mag dies daran liegen, daß bisher eine brauchbare Untersuchung der Genauigkeit der Adamsschen Integration gefehlt hat. Diese Lücke soll hier ausgefüllt werden, indem für die Fehlergrenzen des Verfahrens eine Abschätzung und eine genaue Bestimmung gegeben wird.

Die folgenden Ausführungen beschränken sich auf den Fall einer einzigen Gleichung erster Ordnung. Die Erweiterung der Untersuchung auf Gleichungssätze oder auf Gleichungen höherer Ordnung unterliegt keinen besonderen Schwierigkeiten. Für Leser, die mit dem Adamsschen Verfahren noch nicht vertraut sind, wird es sich empfehlen, vorerst den Rechnungsgang dem am Schluß des Aufsatzes angefügten Zahlenbeispiel zu entnehmen.

1. Allgemeiner Ansatz. Als Integral einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

bezeichnen wir eine Funktion $y(x)$, wenn für irgend zwei Werte x_n und x_{n+1} die Beziehung

$$y(x_{n+1}) - y(x_n) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y[x])\, dx \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

besteht. Dabei wollen wir voraussetzen, daß die Funktion $f(x, y)$ der sog. Lipschitz-Bedingung genügt, d. h. bezüglich y beschränkten Differenzenquotienten besitzt, daß also für beliebige x, y und y^*

$$|f(x, y) - f(x, y^*)| \leqq \varkappa\, |y - y^*| \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3),$$

wobei $\varkappa$ eine gegebene Konstante. Praktisch bestimmt man $\varkappa$ zu einem gegebenen $f(x, y)$ als Höchstbetrag der partiellen Ableitung von f nach y in dem in Frage kommenden Bereich.

Eine »Näherungslösung« von (1) wird bestimmt durch eine Folge von Zahlen $y_1, y_2, y_3 \ldots$, die gewissen Werten $x_1, x_2, x_3 \ldots$ der unabhängig Veränderlichen x derart zugeordnet sind, daß die Differenzen oder »Fehler«

$$\varepsilon_n = y_n - y(x_n) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

[1]) Math. Zeitschr. Bd. 11 (1921), S. 95.

[2]) Nach A. N. Kriloff, Proceed. of the I. intern. congress for applied mechanics Delft, Delft 1925, S. 212.

dem Betrage nach unter einer gewissen Schranke bleiben. Wir wollen uns der Einfachheit halber nur mit dem Fall beschäftigen, daß die ausgezeichneten Abszissenwerte äquidistant mit der Schrittweite h sind, so daß etwa

$$x_0 = 0, \quad x_1 = h, \quad x_2 = 2h, \quad x_3 = 3h, \ldots \ldots \quad (5)$$

gesetzt werden kann.

Der entscheidende Gedanke des Verfahrens »fortlaufender Extrapolation« besteht nun darin, in Analogie zu (2) eine Differenz $y_{n+1} - y_n$ derart zu berechnen, daß auf der rechten Seite für den Integranden das Polynom r-ten Grades gesetzt wird, das an den Stellen

$$\left.\begin{array}{lllll} & x_n, & x_{n-1}, & x_{n-2}, \ldots & x_{n-r} \\ \text{die Werte} & f(x_n, y_n), & f(x_{n-1}, y_{n-1}), & f(x_{n-2}, y_{n-2}), \ldots & f(x_{n-r}, y_{n-r}) \end{array}\right\} \quad (6),$$

annimmt. War man im Verlaufe der Rechnung bis zur Stelle x_n $(n > r)$ fortgeschritten, so sind ja die Werte von $y_n, y_{n-1}, \ldots y_{n-r}$, daher auch die zugehörigen f-Werte, schon bekannt und diese können zur Berechnung von y_{n+1} herangezogen werden. Das Polynom kann, wie man weiß, nach der Lagrangeschen oder nach der Newtonschen Interpolationsformel bestimmt werden. Für die praktische Rechnung empfiehlt sich das letztere, für unsere Untersuchung der Fehlergrenzen ist die Lagrangesche Form vorzuziehen. In ihr erscheinen die Koeffizienten des Polynoms als linear-homogene Ausdrücke in den $(r+1)$ Funktionswerten $f(x_n, y_n)$ bis $f(x_{n-r}, y_{n-r})$. Integriert man über das Intervall der Länge h von x_n bis x_{n+1}, so erhält man einen Ausdruck der Form

$$h\left[\alpha_0 f(x_n, y_n) + \alpha_1 f(x_{n-1}, y_{n-1}) + \alpha_2 f(x_{n-2}, y_{n-2}) + \ldots \alpha_r f(x_{n-r}, y_{n-r})\right] \quad (7),$$

in dem die α ein für allemal berechenbare, nur von dem »Näherungsgrad« r abhängige Zahlen bedeuten; z. B. ist für $r = 3$: $\alpha_0 = \frac{55}{24}$ usf.

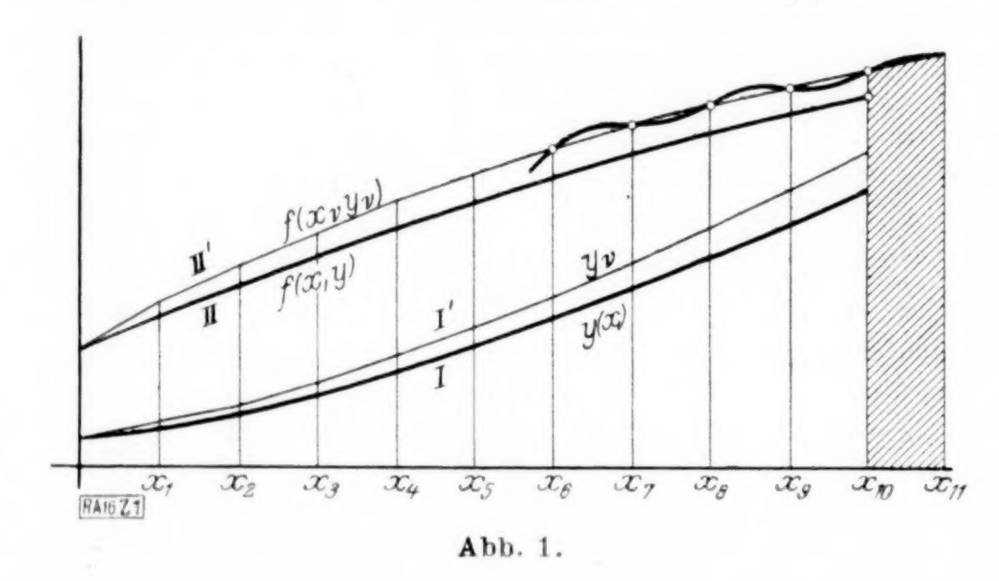


Abb. 1.

Zur Veranschaulichung betrachte man Abb. 1. Wäre die Kurve I, d. i. das richtige Integral $y(x)$ bis zur Abszisse x_{10} schon bekannt, so könnte man auch die Kurve II, nämlich $f(x, y[x])$ bis zur Stelle x_{10} bestimmen. Tatsächlich kennt man nur die zehn, mit Fehlern behafteten Näherungswerte $y_1, y_2, \ldots y_{10}$, die auf dem Linienzug I' liegen, und kann zu jedem der zehn Punkte die Werte $f(x_1, y_1), f(x_2, y_2), \ldots f(x_{10}, y_{10})$ rechnen, die den Linienzug II' ergeben. Um nun y_{11} zu bestimmen, denkt man sich durch die letzten $r+1$ Punkte von II', also bei $r = 4$ durch die Punkte mit den Indizes 6, 7, 8, 9 und 10, die Parabel r-ten Grades gelegt und in das Gebiet zwischen x_{10} und x_{11} fortgesetzt. Das Integral über diesen Parabelbogen, das die Form (7) hat, dient als Ersatz für das Integral über die Funktion $f(x, y[x])$, die man wegen Unkenntnis von $y(x)$ nicht zur Verfügung hat.

Die Adamssche Integrationsformel, die an Stelle von (2) tritt, lautet mithin — in der für die Fehlerbestimmung geeigneten Form[1]) —

$$y_{n+1} - y_n = h \sum_{\rho=0}^{r} \alpha_\rho f(x_{n-\rho}, y_{n-\rho}) \quad \ldots \ldots \quad (8).$$

Um die Fehler ε_n zwischen y_n und $y(x_n)$ zu berechnen, subtrahieren wir (2) von (8) und fügen dabei, einmal mit positivem, einmal mit negativem Vorzeichen, den Ausdruck

$$h \sum_{\rho=0}^{r} \alpha_\rho f(x_{n-\rho}, y[x_{n-\rho}]) \quad \ldots \ldots \quad (8')$$

[1]) Die für die praktische Rechnung geeignete Form (die wir hier als bekannt voraussetzen) ist in Gl. (23) angeschrieben und wird im Beispiel, Abschn. 4, näher erörtert.

hinzu, in dem also die Funktionswerte f für die richtigen Werte $x_{n-\rho}$, $y(x_{n-\rho})$ statt für die Näherungswerte $x_{n-\rho}$, $y_{n-\rho}$ benutzt erscheinen. Die Subtraktion ergibt mit Rücksicht auf (4):

$$\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n = h \sum_{\rho=0}^{r} \alpha_\rho \{ f(x_{n-\rho}, y_{n-\rho}) - f(x_{n-\rho}, y[x_{n-\rho}]) \} + \{ h \sum_{\rho=0}^{r} \alpha_\rho f(x_{n-\rho}, y[x_{n-\rho}]) - \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y[x])\, dx \} \quad . \quad . \quad . \quad (9).$$

Der Klammerausdruck im ersten Summenzeichen ist zufolge (3) dem Betrage nach kleiner als $\varkappa\, |y_{n-\rho} - y(x_{n-\rho})|$, also kleiner als $\varkappa\, |\varepsilon_{n-\rho}|$. Was außerdem noch rechts in (9) steht, ist der Unterschied zwischen einem bestimmten Integral und seinem nach der Interpolationsmethode berechneten Näherungswert. Die obere Schranke dieses Fehlers hängt nur von der Beschaffenheit der zu integrierenden Funktion $f(x, y[x])$, von der Schrittweite h und von dem Näherungsgrad r ab. Wir bezeichnen diese Schranke, deren Wert in **2** berechnet werden wird, als den »Quadraturfehler« c_r und haben dann

$$|\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n| \leqq \varkappa\, h\, [\, |\alpha_0\, \varepsilon_n| + |\alpha_1\, \varepsilon_{n-1}| + \ldots |\alpha_r\, \varepsilon_{n-r}|\,] + c_r \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

oder auch

$$|\varepsilon_{n+1}| \leqq (1 + \varkappa\, h\, |\alpha_0|)\, |\varepsilon_n| + \varkappa\, h\, |\alpha_1|\, |\varepsilon_{n-1}| + \ldots \varkappa\, h\, |\alpha_r|\, |\varepsilon_{n-r}| + c_r \quad . \quad . \quad (10').$$

Die weitere Untersuchung zerfällt nunmehr in zwei Teile. Es ist einerseits der Quadraturfehler c_r zu bestimmen, andrerseits die »Fehlerfortpflanzung« zu erörtern, die darin zum Ausdruck kommt, daß nach (10) oder (10') der Fehler an irgendeiner Stelle von den $(r+1)$ vorangehenden Fehlern abhängt.

Wäre f von y unabhängig, läge also eine reine Quadraturaufgabe vor, so hätten wir in (3) $\varkappa = 0$, mithin wäre nach (10) $|\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n| \leqq c_r$, und da bei gegebenem Anfangswert $y_0 = y(x_0)$ für ε_0 der Wert 0 zu setzen ist: $|\varepsilon_{n+1}| \leqq (n+1)\, c_r$, d. h. es träte nach $(n+1)$ Schritten bloß der $(n+1)$-fache Quadraturfehler auf.

2. Der Quadraturfehler c_r. Um den Quadraturfehler zu berechnen, muß man nur bekannte Ueberlegungen aus der Interpolationslehre anwenden. Wir verwandeln zunächst die unabhängig Veränderliche x, indem wir

$$x = x_n + h\, u, \qquad u = \frac{x - x_n}{h} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

setzen. Dabei gehen die Punkte $x = x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots x_{n-r}$ in $u = 0, -1, -2, \ldots -r$ und das Intervall x_n bis x_{n+1} in 0 bis 1 über. Für die Funktion $f(x, y[x])$ schreiben wir jetzt einfach $F(u)$ und stellen uns die Aufgabe, $F(u)$ durch das Polynom r-ten Grades zu ersetzen, mit dem es an den Stellen $u = 0, -1, -2, \ldots -r$ übereinstimmt.

Zu diesem Zweck führt man einerseits die Polynome

$$\left.\begin{array}{l} \omega_0(u) = u, \quad \omega_1(u) = u(u+1), \quad \omega_2(u) = u(u+1)(u+2), \ldots \\ \qquad \omega_r(u) = u(u+1)(u+2)\ldots(u+r) \end{array}\right\} \quad (12)$$

ein, andrerseits die Differenzen erster, zweiter, ... r-ter Ordnung:

$$\left.\begin{array}{l} \Delta F(\varrho) = F(\varrho) - F(\varrho - 1), \quad \Delta^2 F(\varrho) = \Delta F(\varrho) - \Delta F(\varrho - 1), \ldots \\ \qquad \Delta^r F(\varrho) = \Delta^{r-1} F(\varrho) - \Delta^{r-1} F(\varrho - 1) \end{array}\right\} \quad (13).$$

Nach der Newtonschen Interpolationsformel gilt nun

$$F(u) = F(0) + \Delta F(0) \cdot \omega_0(u) + \Delta^2 F(0) \frac{\omega_1(u)}{2!} + \Delta^3 F(0) \frac{\omega_2(u)}{3!} + \ldots \Delta^r F(0) \frac{\omega_{r-1}(u)}{r!} + R_r \quad . \quad . \quad (14).$$

Was auf der rechten Seite vor R_r steht, ist das gesuchte Polynom r-ten Grades. Für das Restglied R_r kann in bekannter Weise gesetzt werden

$$R_r = F^{(r+1)}(v) \cdot \frac{\omega_r(u)}{(r+1)!} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15),$$

wenn $F^{(r+1)}$ die $(r+1)$-te Ableitung von F nach u (also das h^{r+1}-fache der Ableitung von f nach x) und v eine (unbekannte) Stelle des für uns in Frage kommenden Bereiches $-r$ bis $+1$ bezeichnet.

Integrieren wir (14) über u von 0 bis 1 und multiplizieren mit h, so erhalten wir, weil $dx = h\, du$ und $F(u) = f(x, y[x])$ ist, auf der linken Seite gerade das von x_n bis x_{n+1} genommene Integral von $f(x, y[x])$. Der Fehler, der bei der Integration begangen

wird, wenn man $F(u)$ durch das Polynom ersetzt, ist also das h-fache des von 0 bis 1 erstreckten Integrals von R_r. Bedenkt man, daß $\omega_r(u) > 0$ für $u > 0$, so erhält man aus (15) eine obere Schranke für den Fehlerbetrag, indem man den größten Betrag, den $F^{(r+1)}(v)$ annehmen kann — und den wir kurz mit $|F^{(r+1)}|$ bezeichnen — mit dem Integral von $\omega_r(u)$ und dem Faktor $h:(r+1)!$ multipliziert:

$$c_r = \beta_r h\,|F^{(r+1)}| = \beta_r h^{r+2}\,|f^{(r+1)}| \quad \text{mit } \beta_r = \frac{1}{(r+1)!}\int_0^1 \omega_r(u)\,du \quad . \quad . \quad (16).$$

Da $\omega_r(u)$ aus (12) eingesetzt werden kann und die Integration in (16) leicht ausführbar ist, ist der Quadraturfehler damit grundsätzlich gefunden.

Um β_r tatsächlich zu berechnen, muß man ω_r nach Potenzen von u entwickeln. Die Koeffizienten dieser Polynome sind leicht durch Ausmultiplizieren zu ermitteln. Sie sind, vom niedrigsten angefangen, in den Zeilen des folgenden Schemas angegeben:

r						
$r = 1$	1	1				
2	2	3	1			
3	6	11	6	1		
4	24	50	35	10	1	
5	120	274	225	85	15	1
.	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
	u	u^2	u^3	u^4	u^5	u^6

Jede der Zahlen hier entsteht, indem man die darüber stehende mit r multipliziert und zu der links obenstehenden hinzuzählt. Links von der ersten Spalte sind lauter Nullen zu denken. Nunmehr erhält man β_r, abgesehen vom Nenner $(r+1)!$, indem man die Zahlen einer Zeile der Reihe nach durch $2, 3, \ldots (r+2)$ dividiert und dann addiert, z. B. für $r = 3$

$$\beta_3 = \frac{1}{4!}\left(\frac{6}{2} + \frac{11}{3} + \frac{6}{4} + \frac{1}{5}\right) = \frac{251}{720}.$$

Die so berechneten β_r sind für $r = 0$ bis 5

$$\left.\begin{array}{lll} \beta_0 = \frac{1}{2} = 0{,}50000, & \beta_1 = \frac{5}{12} = 0{,}41667, & \beta_2 = \frac{3}{8} = 0{,}37500, \\ \beta_3 = \frac{251}{720} = 0{,}34861, & \beta_4 = \frac{95}{288} = 0{,}32986, & \beta_5 = \frac{19\,087}{60\,480} = 0{,}31686 \end{array}\right\} \quad (16').$$

Eine gewisse praktische Schwierigkeit bei allen Fehlerbestimmungen, die mit Interpolation zusammenhängen, bringt stets die Bestimmung der höheren Ableitungen von $F(u)$ mit sich. Hier wird sie noch besonders dadurch umständlich, daß die unabhängig Veränderliche x in $f(x, y[x]) = F(u)$ doppelt enthalten ist. Man hat, mit Rücksicht auf $dx = h\,du$

$$F^{(1)}(u) = h\frac{dF}{dx} = h\,y'', \qquad F^{(2)}(u) = h^2\frac{d^2F}{dx^2} = h^2 y''' \text{ usf.} \quad . \quad . \quad (17)$$

und wenn mit f_x, f_y die partiellen Ableitungen von $f(x, y)$ bezeichnet werden:

$$F^{(1)}(u) = h\frac{dF}{dx} = h\left[f_x + \frac{dy}{dx}f_y\right] = h\,(f_x + f f_y) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17')$$

und ebenso

$$F^{(2)}(u) = h^2\left[f_{xx} + 2 f f_{xy} + f^2 f_{yy} + f_x f_y + f f_y^2\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17'').$$

Die höheren Ableitungen bildet man am besten in der Weise, daß man unmittelbar an der gegebenen Funktion $f(x, y)$ die Operation

$$h\left(\frac{\partial}{\partial x} + f\frac{\partial}{\partial y}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17''')$$

sukzessive ausführt. Oft ist es vorteilhafter, beim Differenzieren den Wert für y' zunächst nicht einzusetzen, sondern y' mit seinen Ableitungen $y'', y''' \ldots$ stehen zu lassen, so daß man Rekursionen für die höheren Ableitungen erhält. Wo auch dies zu umständlich ist, wird man sich zur Abschätzung von $|f^{(r+1)}|$ eventuell mit den Differenzenquotienten $(r+1)$-ter Ordnung an den Stellen ganzzahliger u begnügen, die ohne viel Mühe an Hand des Schemas zu rechnen sind, das man schon für die Integration entwickeln muß. Dazu folgen noch einige Bemerkungen bei Behandlung des Beispiels in **4.**

Zur Beurteilung der Fehlerfortpflanzung bedarf es auch noch der Kenntnis der in (7) eingeführten Beiwerte α. Man könnte sie unmittelbar aus der Lagrangeschen Form

der Interpolationsgleichung bestimmen, für uns ist es einfacher, sie aus dem Ansatz (14) herzuleiten. Integriert man hier rechts, unter Weglassung des Restgliedes R_r, von 0 bis 1, so erhält man als Koeffizienten von $\Delta F(0)$, $\Delta^2 F(0)$ usf. gerade die in (16) definierten Größen β_0, β_1, ..., also

$$F(0) + \beta_0 \Delta F(0) + \beta_1 \Delta^2 F(0) + \beta_2 \Delta^3 F(0) + \ldots + \beta_{r-1} \Delta^r F(0) \quad . \quad (18).$$

Dieser Ausdruck muß mit der Summe (8') übereinstimmen. Da nach (13)

$$\left.\begin{aligned} &\Delta F(0) = F(0) - F(-1), \quad \Delta^2 F(0) = F(0) - 2F(-1) + F(-2), \\ &\Delta^3 F(0) = F(0) - 3F(-1) + 3F(-2) - F(-3) \text{ usw.} \end{aligned}\right\} \quad (19),$$

so ist in der Tat (18) linear-homogen in den F-Werten und man gewinnt durch Koeffizienten-Vergleichung:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_0 &= 1 + \beta_0 + \beta_1 \ldots\ldots + \beta_{r-1} \\ \alpha_1 &= \quad -\beta_0 - 2\beta_1 - 3\beta_2 \ldots\ldots - r\beta_{r-1} \\ \alpha_2 &= \quad \beta_1 + 3\beta_2 + 6\beta_3 \ldots\ldots + \binom{r}{2}\beta_{r-1} \\ \alpha_3 &= \quad -\beta_2 - 4\beta_3 - 10\beta_4 \ldots - \binom{r}{3}\beta_{r-1} \text{ usf.} \end{aligned}\right\} \quad . \quad (20).$$

Daraus rechnen sich: für

$$\left.\begin{aligned} r=1:&\ \alpha_0 = \frac{3}{2}, \quad \alpha_1 = -\frac{1}{2} \\ r=2:&\ \alpha_0 = \frac{23}{12}, \quad \alpha_1 = -\frac{4}{3}, \quad \alpha_2 = \frac{5}{12} \\ r=3:&\ \alpha_0 = \frac{55}{24}, \quad \alpha_1 = -\frac{59}{24}, \quad \alpha_2 = \frac{37}{24}, \quad \alpha_3 = -\frac{3}{8} \\ r=4:&\ \alpha_0 = \frac{1901}{720}, \quad \alpha_1 = -\frac{1387}{360}, \quad \alpha_2 = \frac{109}{30}, \quad \alpha_3 = -\frac{637}{360}, \quad \alpha_4 = \frac{251}{720} \\ r=5:&\ \alpha_0 = \frac{4277}{1440}, \quad \alpha_1 = -\frac{2641}{480}, \quad \alpha_2 = \frac{4991}{720}, \quad \alpha_3 = -\frac{3649}{720}, \quad \alpha_4 = \frac{959}{480}, \quad \alpha_5 = -\frac{95}{288} \end{aligned}\right\} \quad (20').$$

Die Summe zusammengehöriger α ist immer gleich 1, die Vorzeichen wechseln regelmäßig ab. Für die Summe der absoluten Beträge, die wir mit A_r bezeichnen und später brauchen werden, findet sich:

$$A_1 = 2{,}0, \quad A_2 = 3{,}667, \quad A_3 = 6{,}667, \quad A_4 = 12{,}244, \quad A_5 = 22{,}800 \quad . \quad . \quad (20'').$$

Schließlich kann man dem Ansatz (18) entnehmen, wie die Hauptformel, die die eigentliche Rechnungsgrundlage des **Adams**schen Verfahrens darstellt, aussieht. Führt man nämlich aus (16') die Werte in (18) ein, so entsteht der Ausdruck

$$F(0) + \frac{1}{2}\Delta F(0) + \frac{5}{12}\Delta^2 F(0) + \frac{3}{8}\Delta^3 F(0) + \frac{251}{720}\Delta^4 F(0) + \ldots \quad (21),$$

der das von 0 bis 1 genommene Integral der ganzen Funktion darstellt, die in den Punkten 0, -1, -2, -3, ... die Werte $F(0)$, $F(-1)$, $F(-2)$, $F(-3)$ ... besitzt. Ersetzen wir $F(0)$ jedesmal durch $f(x_n, y_n)$, wobei das Symbol Δ so zu verstehen ist, daß

$$\left.\begin{aligned} &\Delta f(x_n, y_n) = f(x_n, y_n) - f(x_{n-1}, y_{n-1}), \\ &\Delta^2 f(x_n, y_n) = f(x_n, y_n) - 2f(x_{n-1}, y_{n-1}) + f(x_{n-2}, y_{n-2}), \text{ usf.} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (22)$$

und multiplizieren schließlich mit h, so bekommen wir die für praktische Anwendung geeignete Form von (8):

$$\begin{aligned} y_{n+1} - y_n = h\Big[f(x_n, y_n) &+ \frac{1}{2}\Delta f(x_n, y_n) + \frac{5}{12}\Delta^2 f(x_n, y_n) + \\ &+ \frac{3}{8}\Delta^3 f(x_n, y_n) + \frac{251}{720}\Delta^4 f(x_n, y_n) + \ldots\Big] \quad (23), \end{aligned}$$

von der dann in **4** Gebrauch gemacht wird.

3. Die Fehlerfortpflanzung. Kennt man einmal den Quadraturfehler c_r aus (16) und (16'), so kann man ohne weiteres aus Gl. (10) oder (10') eine obere Schranke des Gesamtfehlers $|\varepsilon_n|$ für beliebiges n berechnen, sobald nur Schranken für $|\varepsilon_0|$, $|\varepsilon_1|$, $|\varepsilon_2|$, ... $|\varepsilon_r|$ bekannt sind. Wir schreiben unter Berücksichtigung der in (20) festgestellten Vorzeichen der α für (10):

$$|\varepsilon_{n+1}| \leq (1 + \varkappa h \alpha_0)|\varepsilon_n| - \varkappa h \alpha_1 |\varepsilon_{n-1}| + \varkappa h \alpha_2 |\varepsilon_{n-2}| - \ldots \pm \varkappa h \alpha_r |\varepsilon_{n-r}| + c_r \quad (24).$$

Der Wert des Integrals $y(x)$ an der Stelle $x = x_0$ muß als gegeben vorausgesetzt werden, woraus $\varepsilon_0 = 0$ folgt[1]). Die Werte von $y(x)$ an den Stellen $x = x_1, x_2, \ldots x_r$ müssen auf irgendeinem Wege schon berechnet sein, bevor man mit dem Integrations-Verfahren beginnt. Aus dieser Vorausberechnung sind zugleich die Grenzen der Fehler $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_r$ zu bestimmen. Gl. (24) dient dann, wenn man $n = r$ setzt, dazu, eine Schranke für ε_{r+1} zu liefern. Setzt man diese in (24) ein, nachdem man $n = r + 1$ gewählt hat, so erhält man eine Ungleichung für $|\varepsilon_{r+2}|$ usf. Die Aufgabe der Fehlerbestimmung kann damit als grundsätzlich gelöst angesehen werden. Dabei kann man, wenn man will, für $\varkappa$ und c_r bei jedem Schritt neue Werte einsetzen, wie sie den Eigenschaften der Funktion $f(x, y)$ in dem betreffenden Intervall von x_{n-r} bis x_n entsprechen.

Oft wird es zu mühsam sein, namentlich wenn eine sehr große Zahl von Intervallen durchlaufen wird, auf diese Weise ein ε nach dem andern einzugrenzen. Man macht daher vorteilhaft von den Regeln zur Auflösung linearer Differenzengleichungen Gebrauch, die gestatten, — wenn man in (24) das Gleichheitszeichen gelten läßt, — ein beliebiges $|\varepsilon_n|$ unmittelbar durch $|\varepsilon_0|, |\varepsilon_1|, |\varepsilon_2|, \ldots |\varepsilon_r|$ auszudrücken. Die so berechneten Werte bilden jedenfalls eine Folge oberer Schranken für die Fehlergrößen $|\varepsilon_n|$.

Wir führen zunächst, um den Ansatz homogen zu machen, an Stelle von $|\varepsilon_n|$ die neue Variable

$$\eta_n = |\varepsilon_n| + \frac{c_r}{\varkappa h (\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \ldots \pm \alpha_r)} = |\varepsilon_n| + \frac{1}{A_r}\frac{c_r}{\varkappa h} \quad \ldots \ldots \quad (25)$$

ein und erhalten aus (24)

$$\eta_{n+1} = (1 + \varkappa h \alpha_0)\eta_n - \varkappa h \alpha_1 \eta_{n-1} + \varkappa h \alpha_2 \eta_{n-2} - \varkappa h \alpha_3 \eta_{n-3} \ldots \pm \varkappa h \alpha_r \eta_{n-r} \quad (24').$$

Diese lineare homogene Differenzengleichung löst man bekanntlich mit dem Ansatz

$$\eta_n = C z^n \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (26),$$

wobei z der durch Einsetzen von (26) in (24') folgenden Gleichung

$$z^{r+1} = z^r (1 + \varkappa h \alpha_0) - \varkappa h \alpha_1 z^{r-1} + \varkappa h \alpha_2 z^{r-2} - \ldots \pm \varkappa h \alpha_r \quad \ldots \quad (27)$$

genügt. Jeder der $r + 1$ Wurzeln dieser Gleichung entspricht ein partikuläres Integral der Form (26) und die $r + 1$ Konstanten C bestimmen sich aus den gegebenen Anfangswerten $\eta_0, \eta_1, \eta_2, \ldots \eta_r$. Für die Zwecke einer bloßen Abschätzung der η und ε genügt aber ein viel einfacheres Vorgehen.

Schreibt man (27) in der Form

$$z^{r+1} - z^r = \varkappa h (\alpha_0 z^r - \alpha_1 z^{r-1} + \alpha_2 z^{r-2} - \ldots \pm \alpha_r) \quad \ldots \quad (27'),$$

so sieht man sofort, daß es mindestens eine reelle, positive Wurzel oberhalb 1 geben muß. Denn für $z = 1$ hat die linke Seite von (27') den Wert 0, die rechte einen Wert > 0, während für $z \to \infty$ der Ausdruck links stärker unendlich, also schließlich größer wird als der rechte. Lösen wir also (27') nach $\varkappa h$ auf:

$$\varkappa h = \frac{z^r (z-1)}{\alpha_0 z^r - \alpha_1 z^{r-1} + \alpha_2 z^{r-2} \ldots \pm \alpha_r} \quad \ldots \ldots \quad (28),$$

so brauchen wir nur dem z auf der rechten Seite von 1 an wachsende Werte zu erteilen, um die gewünschte Zuordnung zwischen z und $\varkappa h$ zu erhalten, die nur noch von dem Näherungsgrad r abhängt und zu jedem $\varkappa h$ den oberhalb 1 gelegenen (ersten) z-Wert liefert. Da es zumeist nur auf sehr kleine Werte von $\varkappa h$ und $x - 1$ ankommen wird, kann man auch zweckmäßig die nach (28) berechneten Beziehungen durch Näherungsausdrücke darstellen, die unmittelbar z als Funktion von $\varkappa h$ liefern. In Abb. 2 sind die genauen, der Gl. (28) entsprechenden Kurven für $r = 1, 2, 3, 4$ und 5 eingezeichnet. Sie unterscheiden sich in dem Bereich der Zeichnung nicht merklich von den Kurven mit den Gleichungen

$$\left.\begin{array}{lll} z = 1 + 2\varkappa h - 0{,}67(\varkappa h)^2 & \text{für} & r = 1 \\ z = 1 + 3{,}67\varkappa h - 3{,}66(\varkappa h)^2 & » & r = 2 \\ z = 1 + 6{,}67\varkappa h - 16{,}2(\varkappa h)^2 & » & r = 3 \\ z = 1 + 12{,}24\varkappa h - 61{,}3(\varkappa h)^2 & » & r = 4 \\ z = 1 + 22{,}8\varkappa h - 215{,}8(\varkappa h)^2 & » & r = 5 \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (28').$$

[1]) Wenn $y(0)$ als abgekürzter Dezimalbruch eingesetzt wird, ist natürlich für $|\varepsilon_0|$ eine halbe Einheit der letzten Stelle zu nehmen.

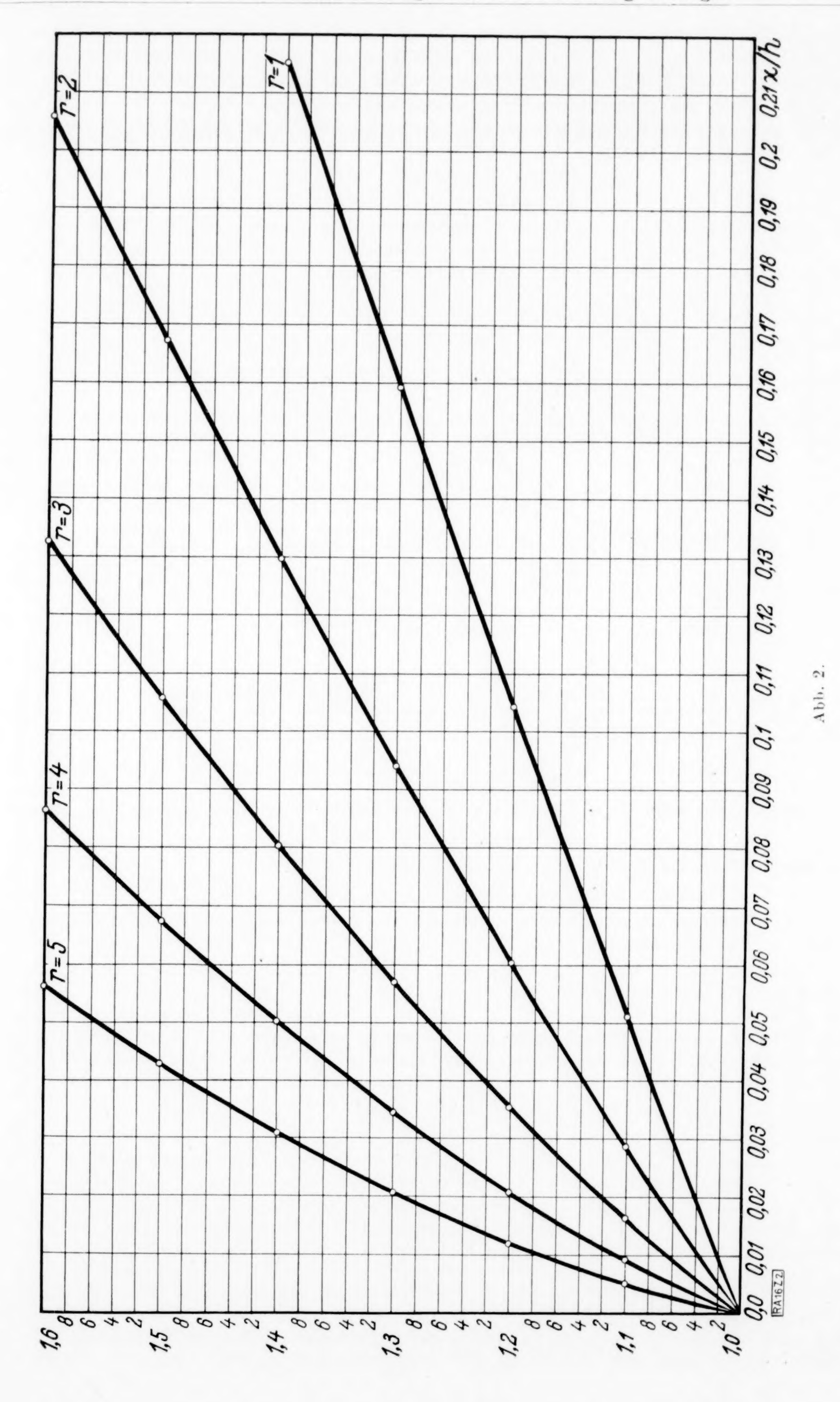

r=1
r=2
r=3
r=4
r=5
0,0 0,01 0,02 0,03 0,04 0,05 0,06 0,07 0,08 0,09 0,1 0,11 0,12 0,13 0,14 0,15 0,16 0,17 0,18 0,19 0,2 0,21 x/h
1,0 2 4 6 8 1,1 2 4 6 8 1,2 2 4 6 8 1,3 2 4 6 8 1,4 2 4 6 8 1,5 2 4 6 8 1,6

Abb. 2.

Die Anfangstangenten der Kurven (28) und auch der Näherungsparabeln (29) haben die Neigung $A_r = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 \ldots \pm \alpha_r$. Da die Kurven ganz unterhalb der Tangente in $\varkappa h = 0$, $z = 1$ verlaufen, gilt allgemein

$$z \leq 1 + A_r \varkappa h \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (29).$$

Liegen die Beträge der Fehler $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_r$ unterhalb der positiven Zahl ε, so setzen wir mit Rücksicht auf (25):

$$\eta_0 = \varepsilon + \frac{c_r}{\varkappa h (\alpha_0 - \alpha_1 + \ldots \pm \alpha_r)} = \varepsilon + \frac{1}{A_r} \frac{c_r}{\varkappa h} \quad \ldots \ldots \quad (30)$$

und nach (26):

$$\eta_n = \eta_0 z^n \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (31)$$

Dies ist eine partikuläre Lösung der Differenzengleichung (24'), und zwar diejenige, die an den Stellen $o, h, 2h, \ldots rh$ die Werte $\eta_0, z\eta_0, z^2\eta_0, \ldots z^r\eta_0$ annimmt, also, da $z > 1$ jedenfalls Werte größer oder gleich η_0. Die nach (25) zugehörigen $|\varepsilon_0|, |\varepsilon_1|, |\varepsilon_2|, \ldots |\varepsilon_r|$ sind also sämtlich größer oder mindestens gleich ε. (Vergl. Abb. 3, die für $r = 4$ entworfen ist.) Unsere Differenzengleichung (24) oder (24') hat aber zufolge der durchweg positiven Koeffizienten auf der rechten Seite die Eigenschaft, daß sie bei vergrößerten Anfangswerten nur vergrößerte Endwerte liefern kann. Demnach geben die nach (30) und (31) berechneten $\eta_{r+1}, \eta_{r+2}, \ldots \eta_n$ und die aus ihnen nach (25) folgenden $|\varepsilon_{r+1}|, |\varepsilon_{r+2}|, \ldots |\varepsilon_n|$ obere Schranken für die gesuchten Größen.

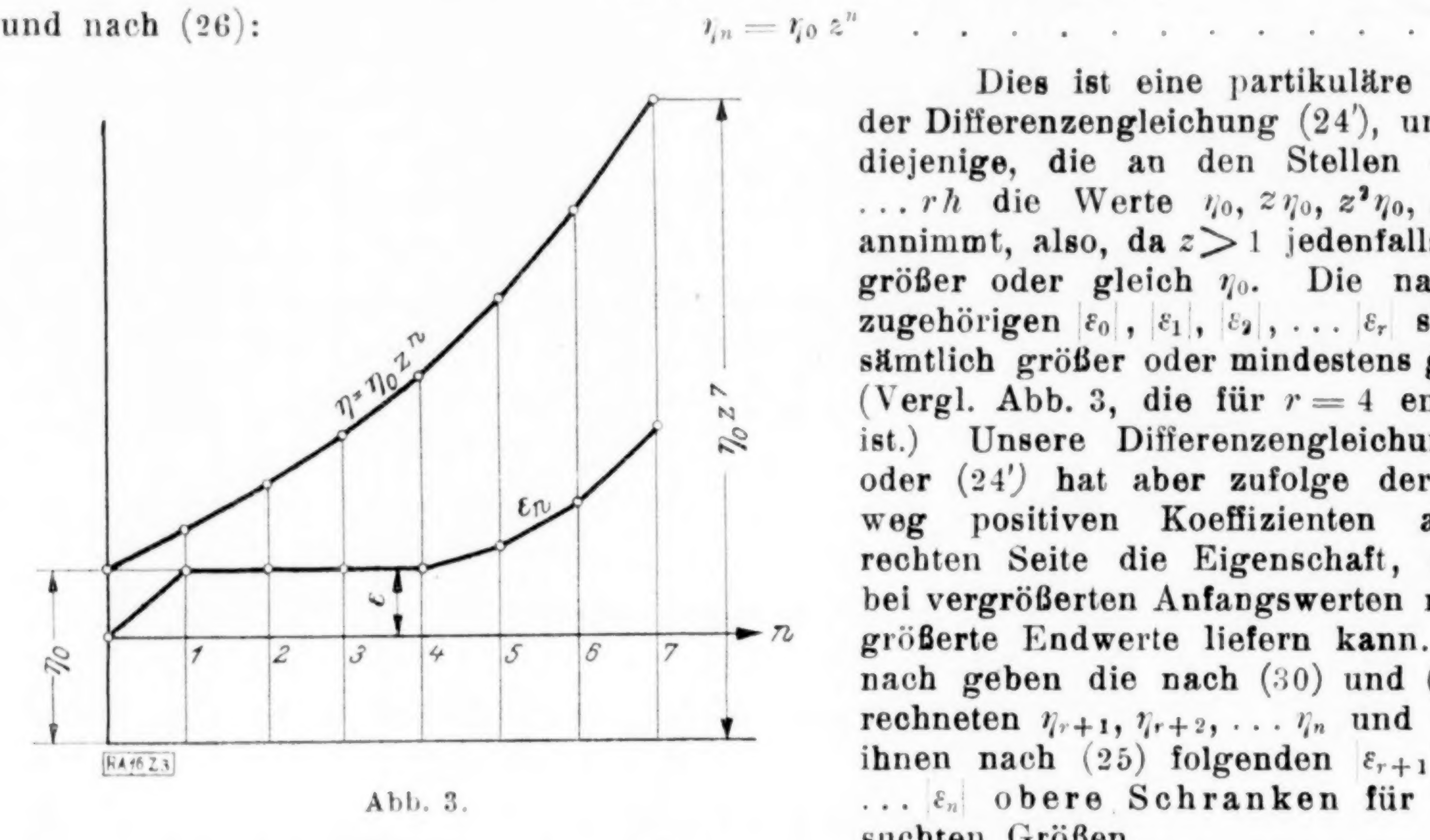


Abb. 3.

Durch Einsetzen von (31) und (30) und schließlich von (16) in (25) und Auflösen nach $|\varepsilon_n|$ findet man also

$$|\varepsilon_n| \leq \eta_0 z^n - \frac{1}{A_r} \frac{c_r}{\varkappa h} = \varepsilon z^n + \frac{1}{A_r} \frac{c_r}{\varkappa h} (z^n - 1) = \varepsilon z^n + \frac{\beta_r}{A_r} h^{r+1} \frac{|f^{(r+1)}|}{\varkappa} (z^n - 1) \quad (32).$$

Verwendet man jedoch für z die Ungleichung (29) und gestattet sich die Näherung

$$(1 + A_r \varkappa h)^n \sim 1 + n A_r \varkappa h$$

(die nur bei kleinem $n A_r \varkappa h$ zulässig ist), so wird aus (32):

$$|\varepsilon_n| < \varepsilon (1 + n A_r \varkappa h) + n c_r = \varepsilon (1 + n A_r \varkappa h) + n \beta_r h^{r+1} |f^{(r+1)}| \quad . \quad . \quad (33).$$

Zusammengefaßt ergibt sich nunmehr folgendes Verfahren zur Abschätzung des gesamten Integrationsfehlers ε_n:

Gegeben ist der Näherungsgrad r, die Schrittgröße h, die Schrittzahl n und die Fehlerschranke ε der Ausgangswerte $y_1, y_2, \ldots y_r$; für die Funktion $f(x, y)$ muß man die Lipschitz-Konstante $\varkappa$ (Höchstbetrag der partiellen Ableitung nach y) und den Höchstbetrag $|f^{(r+1)}|$ der $(r+1)$-ten totalen Ableitung nach x abschätzen. Zu $\varkappa h$ entnimmt man z aus Abb. 2 oder Gl. (28') und hat

$$|\varepsilon_n| \leq \varepsilon z^n + \gamma_r h^{r+1} \frac{|f^{(r+1)}|}{\varkappa} (z^n - 1) \quad \ldots \ldots \quad (34)$$

$$\text{mit } \gamma_r = \frac{\beta_r}{A_r} \left. \begin{aligned} &= 0{,}2083 \quad \text{für } r = 1 \\ &= 0{,}1023 \quad \text{»} \quad r = 2 \\ &= 0{,}05229 \quad \text{»} \quad r = 3 \\ &= 0{,}02694 \quad \text{»} \quad r = 4 \\ &= 0{,}01390 \quad \text{»} \quad r = 5 \end{aligned} \right\} \quad \ldots \ldots \quad (34).$$

Einen Näherungswert für $|\varepsilon_n|$ erhält man bei kleinem n, ohne Aufsuchung von z, aus Gl. (33), wobei die Zahlenwerte A_r und β_r aus (20'') und (16') zu entnehmen sind. Eine genauere Schranke für $|\varepsilon_n|$ ergibt sich (ebenfalls ohne Benutzung von z) durch sukzessives Auflösen von (24).

4. Zahlenbeispiel. Wir wählen zur Erläuterung unserer Fehlerrechnung eine einfache Differentialgleichung, deren exakte Lösung bekannt ist, für die aber Whittaker und Robinson[1]) die Integration nach dem Verfahren fortlaufender Extrapolation durchgeführt haben. Zugleich soll dem mit dem Verfahren noch nicht Vertrauten ein Einblick in dessen praktische Gestaltung gegeben werden. Die Aufgabe besteht darin, das Integral der Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{x+y}, \quad \text{also} \quad f(x,y) = \frac{y-x}{x+y}$$

mit dem Anfangspunkt $x = 0$, $y = 1$ für positive x zu finden. Whittaker wählt den Näherungsgrad $r = 4$ und die Schrittgröße $h = 0{,}02$.

Es handelt sich nun zunächst darum, die für die Extrapolation erforderlichen Ausgangswerte, das sind Näherungen für $y(x)$ an den Stellen $x = h$, $2h$, $3h$ und $4h$ zu bestimmen. Diesem Zweck dient am besten die Taylorsche Entwicklung von $y(x)$ an der Stelle $x = 0$, $y = 1$. Man erhält sie in einfacher Weise, indem man mit unbestimmten Koeffizienten $\gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \ldots$

$$y = 1 + x + \gamma_2 x^2 + \gamma_3 x^3 + \gamma_4 x^4 + \ldots.$$

ansetzt, dies in die Differentialgleichung einführt und die Bedingung dafür aufschreibt, daß der Koeffizient von x^ν $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ verschwindet. So erhält man zur Bestimmung der γ_ν:

$$\gamma_2 = -1, \; \gamma_3 = \frac{4}{3}, \; \gamma_{\nu+1} = -\frac{2\nu}{\nu+1}\gamma_\nu - \frac{1}{2}(\gamma_2\gamma_{\nu-1} + \gamma_3\gamma_{\nu-2} + \ldots \gamma_{\nu-1}\gamma_2) \text{ für } \nu = 3, 4, 5 \ldots.$$

Berücksichtigt man etwa die ersten 7 bis 8 Glieder der Entwicklung, so kann man im Bereich bis $x = 0{,}08$ den Wert der Reihe auf 6 Dezimalen genau bestimmen[2]). Whittaker gibt die Werte an, die in der dritten Spalte der folgenden Zahlentafel, in der zweiten bis fünften Zeile als y_1 bis y_4 eingetragen sind. Aus der Natur der Reihe geht hervor, daß sie zur Berechnung von y für wesentlich größere x nicht geeignet wäre.

Zahlentafel.

n	x	y	hf	$h\Delta f \cdot 10^6$	$h\Delta^2 f \cdot 10^6$	$h\Delta^3 f \cdot 10^6$	$h\Delta^4 f \cdot 10^6$
0	0	1,000000	0,020000				
1	0,02	1,019610	0,019230	— 770			
3	0,04	1,038479	0,018516	— 714	56		
3	0,06	1,056659	0,017851	— 665	49	— 7	
4	0,08	1,074195	0,017228	— 623	42	— 7	0
5	0,10	1,091126	0,016642	— 586	37	— 5	2
6	0,12	1,107490	0,016090	— 552	34	— 3	2
7	0,14	1,123317	0,015567	— 523	29	— 5	— 2
8	0,16	1,138632	0,015072	— 495	28	— 1	4
9	0,18	1,153469	0,014601	— 471	24	— 4	3
10	0,20	1,167842					

Zu den fünf Wertepaaren x_ν, y_ν in der zweiten und dritten Spalte der Tafel lassen sich nun die entsprechenden Funktionswerte $f(x_\nu, y_\nu)$ rechnen, die — gleich mit $h = 0{,}02$ multipliziert — in der vierten Spalte verzeichnet sind, z. B. in der zweiten Zeile

$$0{,}02\,(1{,}019610 - 0{,}02) : (1{,}019610 + 0{,}02) = 0{,}019230.$$

Aus diesen fünf Zahlen kann man jetzt das vierspaltige Differenzschema so weit entwickeln, als es oberhalb der durchgezogenen wagerechten Trennungslinie Platz findet. In der ersten Spalte neben hf stehen die vier Differenzen $h\Delta f$ je zweier aufeinander folgender hf-Werte in Einheiten von 10^{-6}, z. B. in der zweiten Zeile $19230 - 20000 = -770$. Die nächste Spalte enthält die drei Differenzen der unmittelbar links daneben stehenden $h\Delta f$ usf. Sind diese $4 + 3 + 2 + 1$ Differenzen berechnet, so beginnt der eigentliche Integrationsvorgang.

[1]) E. T. Whittaker und G. Robinson: Calculus of observations, London 1924, S. 366.

[2]) Die Reihe hat die Eigenschaft, daß ihr Rest kleiner ist als das erste vernachlässigte Reihenglied. Dies folgt aus einer später noch zu erörternden Eigenschaft der höheren Ableitungen von f.

Da $r = 4$ gewählt worden ist, können wir für (23) mit leicht verständlicher Abkürzung schreiben:

$$y_{n+1} - y_n = hf + \frac{1}{2} h \varDelta f + \frac{5}{12} h \varDelta^2 f + \frac{3}{8} h \varDelta^3 f + \frac{251}{720} h \varDelta^4 f.$$

Diese Formel ist zur Bestimmung von y_5 in der Weise zu verwenden, daß für $hf, h\varDelta f, \ldots h\varDelta^4 f$ die letzten, unmittelbar oberhalb der wagrechten Linie stehenden Werte in der vierten bis achten Spalte genommen werden, also

$$y_5 = y_4 + 0{,}017228 + 10^{-6}\left(-\frac{1}{2}\cdot 623 + \frac{5}{12}\cdot 42 - \frac{3}{8}\cdot 7 + 0\right) = y_4 + 0{,}016931 = 1{,}091126.$$

Die Kenntnis von y_5 ermöglicht es, den Wert $hf(x_5, y_5)$ zu berechnen und sodann das Differenzenschema um eine wagerechte Reihe von Zahlen zu erweitern: Man schreibt an jede der vier freien Stellen die Differenz, die entsteht, wenn man von der links daneben stehenden Zahl die über dieser stehende Zahl abzieht, z. B. in die fünfte Spalte

$$16642 - 17228 = -586.$$

Aus den fünf Werten für $hf, h\varDelta f, \ldots h\varDelta^4 f$, die jetzt in der sechsten Zeile der Tafel stehen, rechnet sich nun $y_6 - y_5$ nach der gleichen Formel wie früher $y_5 - y_4$, nämlich durch Multiplikation mit den Konstanten $1, {}^1/_2, {}^5/_{12}, \ldots$ und Addition. So erhält man

$$y_6 = y_5 + 0{,}016642 + 10^{-6}\left(-\frac{1}{2}\cdot 586 + \frac{5}{12}\cdot 37 - \frac{3}{8}\cdot 5 + \frac{251}{720}\cdot 2\right) = y_5 + 0{,}016364 = 1{,}007490$$

und fährt mit Ergänzung des Differenzenschemas usw. fort. — Unsere Zahlentafel, die bis y_{10} fortgeführt ist, ist dem Buch von Whittaker und Robinson entnommen; die Verfasser geben an, daß die Rechnung auf sechs Stellen genau ausgeführt ist. Wir wollen nun sehen, mit welcher Genauigkeit der letzt-berechnete Wert $y_{10} = 1{,}167842$ für den gesuchten Wert $y(0{,}2)$ gesetzt werden darf.

Zunächst wollen wir, in Anwendung des hier dargestellten Fehlerschätzungs-Verfahrens den reinen »Quadraturfehler« c_4 bestimmen, der die Kenntnis der fünften Ableitung von $f(x, y[x])$ oder, was dasselbe ist, der sechsten Ableitung von $y(x)$ nach x voraussetzt. In dem vorliegenden Fall lassen sich die höheren Ableitungen noch mit verhältnismäßig geringer Mühe bilden. Es stellt sich nämlich heraus, daß die n-te Ableitung von y oder die $(n+1)$-te von f die Form haben muß:

$$y^{(n)} = (x^2 + y^2)(x + y)^{-2n+1} \cdot P_{n-2},$$

wo P_n ein homogenes Polynom n-ten Grades in x und y bezeichnet. Man bestätigt dies und gewinnt zugleich die Rekursionsformel für die P_n, indem man beiderseits die totale Differentiation nach x, also (bis auf den Faktor h) die Operation (17''')

$$\frac{1}{x+y}\left[(x+y)\frac{\partial}{\partial x} + (y - x)\frac{\partial}{\partial y}\right]$$

ausführt. Links entsteht dabei $y^{(n+1)}$, rechts läßt sich $(x^2 + y^2)$ und die $(-2n-1)$-te Potenz von $(x + y)$ herausheben und, was bleibt, ist

$$P_{n-1} = [nx - (3n - 2)y]\, P_{n-2} + (x + y)\left[y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}\right] P_{n-2}.$$

Da sich durch direkte Ausrechnung für $n = 2$

$$y'' = \frac{d}{dx}\frac{y - x}{x + y} = -2\frac{x^2 + y^2}{x + y}$$

ergibt, so hat man $P_0 = -2$ und kann $P_1, P_2, \ldots$ leicht aus der Rekursionsformel bestimmen, z. B. $P_1 = -4(x - 2y)$, $P_2 = -20(x^2 - 2xy + 3y^2)$ usf. Die gesuchte sechste Ableitung hat den Wert

$$y^{(6)} = -\frac{x^2 + y^2}{(x + y)^{11}}\, 40\,(221\, y^4 - 208\, x\, y^3 + 206\, x^2 y^2 - 96\, x^3 y + 25\, x^4).$$

Wir haben jetzt den Höchstbetrag dieses Ausdrucks abzuschätzen. Zunächst sieht man, daß für positive x, y sowie $x \leq y$ — und dies ist längs des ganzen Kurvenstückes sicher erfüllt — der Klammerausdruck eine alternierende Folge abnehmender Glieder darstellt, also höchstens gleich dem Anfangsglied $221\, y^4$ sein kann. Somit ist

$$|f^{(5)}| = |y^{(6)}| \leq 8840\, \frac{x^2 + y^2}{(x + y)^2} \cdot \frac{y^4}{(x + y)^9} \leq \frac{8840}{y^5} \leq 8840,$$

da $y \geq 1$[1]). Damit ist die Hauptarbeit geleistet. Wir entnehmen der Aufstellung (16') den Wert $\beta_4 = 0{,}330$ und haben daher nach (16)

$$c_4 = 0{,}330 \cdot 0{,}02^6 \cdot 8840 = 0{,}187 \cdot 10^{-6}.$$

Wenn man in anderen Fällen die höheren Ableitungen von $f(x, y[x])$ nicht einfach genug bilden kann, so läßt sich ihre Größenordnung immerhin dem Differenzenschema entnehmen. Die Zahlen in den letzten vier Spalten der Zahlentafel entsprechen dabei den Größen $h^2 y'$, $h^3 y''$, $h^4 y^{(4)}$ und $h^5 y^{(5)}$. Zur Beurteilung der Genauigkeit dieser Abschätzung beachte man, daß aus den oben angeführten Ausdrücken für P_1 und P_2 die genauen Höchstwerte von y''' und $y^{(4)}$ — durch eine analoge Betrachtung wie sie für $y^{(6)}$ angestellt wurde — zu 8, bzw. 60 folgen. Die größten Zahlen in der drittletzten und zweitletzten Spalte der Zahlentafel sind aber 56 bzw. 7, entsprechend $56 \cdot 10^{-6}$ für $h^3 y''' = 0{,}02^3 \cdot 8 = 64 \cdot 10^{-6}$ bzw. $7 \cdot 10^{-6}$ für $h^4 y^{(4)} = 0{,}02^4 \cdot 60 = 9{,}6 \cdot 10^{-6}$. Zur Abschätzung von $h^6 y^{(6)}$ müßte man die Differenzentafel noch um eine Spalte erweitern. Es ist aber klar, daß dies die Berechnung von mindestens einer weiteren Dezimalstelle aller Zahlen erforden würde. Denn da schon die $h\,\Delta^3 f$ einziffrige Zahlen sind, ist schon die Bildung der $h\,\Delta^4 f$ nicht zulässig — die Abrundungsfehler übersteigen hier gewiß die einzelnen Beträge. (Auf das Integrationsverfahren üben diese $h\,\Delta^4 f$ kaum einen merklichen Einfluß aus). — Im allgemeinen wird man sagen dürfen, daß sich eine Abschätzung der höheren Ableitungen von f aus dem Differenzenschema wohl gewinnen läßt, aber nur unter der Bedingung, daß es mit erhöhter Genauigkeit berechnet wird[2]).

Das Maß der Fehlerfortpflanzung hängt in erster Linie von der Lipschitz-Konstanten $\varkappa$ der Funktion $f(x, y)$ ab, d. i. von der Geschwindigkeit, mit der sich $f(x, y)$ bei festem x und Veränderung von y ändert. Sieht man den Differentialquotienten

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2x}{(x+y)^2}$$

an, so bemerkt man leicht, daß sein Wert längs der durch die Punktfolge x_ν, y_ν verlaufenden Linie ständig wächst. Der Größtwert wird also am Ende, bei $x = 0{,}2$, $y = 1{,}168$ erreicht und beträgt hier $0{,}4 : 1{,}368^2 = 0{,}294$. Wir runden noch ein wenig auf, da strenggenommen der Höchstbetrag von $\partial f / \partial y$ in der Umgebung des Integrals (nicht gerade auf der Näherungslinie selbst) zu suchen ist und setzen $\varkappa = 0{,}3$.

Zu $\varkappa h = 0{,}3 \cdot 0{,}02 = 0{,}006$ liefert Abb. 2 bei $r = 4$ den Faktor $z = 1{,}067$. Die Näherungsgleichung (28') würde $z = 1 + 0{,}073 - 0{,}002 = 1{,}07$ geben. Wir bleiben also bei $z = 1{,}067$.

Die Fehlerschranke ε der Ausgangswerte y_1 bis y_4 ist mit einer halben Einheit der sechsten Dezimale anzusetzen, also $\varepsilon = 0{,}5 \cdot 10^{-6}$. Gl. (34) gibt daher — ohne Benutzung des oben berechneten c_r — direkt

$$|\varepsilon_n| \leq 0{,}5 \cdot 1{,}067^n \cdot 10^{-6} + 0{,}02694 \cdot 0{,}02^5 \frac{8840}{0{,}3}(1{,}067^n - 1)$$

$$= [0{,}5 \cdot 1{,}067^n + 2{,}540\,(1{,}067^n - 1)]\,10^{-6}.$$

Für den Endpunkt $x = 0{,}2$ ist $n = 10$, $1{,}067^{10} = 1{,}913$, daher

$$|\varepsilon_{10}| \leq (0{,}956 + 2{,}318)\,10^{-6} = 3{,}27 \cdot 10^{-6}.$$

Nach der Näherungsformel (33) rechnet sich kürzer, ohne daß man vorher z zu ermitteln braucht,

$$|\varepsilon_{10}| \leq [1{,}87 + 0{,}5\,(1 + 0{,}73)]\,10^{-6} = 2{,}73 \cdot 10^{-6}.$$

Das Ergebnis kann dahin ausgesprochen werden, daß y an der Stelle $x = 0{,}2$ mit einer Ungenauigkeit von höchstens ± 3 Einheiten der sechsten Stelle behaftet ist.

Eine genauere Fehlerbestimmung gewinnt man durch exakte Auswertung der Differenzengleichung (24), die entweder durch schrittweises Berechnen von ε_5 aus ε_0, $\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_4$, dann von ε_6 aus $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_5$ usf. oder durch formelmäßige Lösung nach den bekannten, oben angedeuteten Methoden erfolgen kann. Bei einer so geringen Schrittzahl wie $n = 10$ lohnt das letztere gewiß nicht. Man findet mit Rücksicht auf die Anfangsbedingungen $\qquad \varepsilon_0 = 0, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = 0{,}5 \cdot 10^{-6}$

---

[1]) Diese Abschätzung und die gleichlaufende für die Ableitungen anderer als der sechsten Ordnung besagt, daß der Höchstbetrag jeder Ableitung im Anfangspunkt der Kurve erreicht wird. Daraus ergibt sich die oben erwähnte Eigenschaft der Taylor-Entwicklung.

[2]) Strenggenommen ist natürlich die Kenntnis der $(r+1)$-ten Differenz an allen, nicht nur an den durch ganze Vielfache von h gekennzeichneten Abszissen erforderlich.

und auf $c_r = 0{,}187 \cdot 10^{-6}$ aus (24')

$$\varepsilon_5 \leqq [0{,}187 + 0{,}5 + 0{,}006 \cdot 0{,}5\,(\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3)]\, 10^{-6} = 0{,}723 \cdot 10^{-6},$$

ebenso weiter

$$\varepsilon_6 \leqq [0{,}187 + 0{,}723 + 0{,}006\,(0{,}723\,\alpha_0 - 0{,}5\,\alpha_1 + 0{,}5\,\alpha_2 - 0{,}5\,\alpha_3 + 0{,}5\,\alpha_4)]\, 10^{-6} = 0{,}950 \cdot 10^{-6}.$$

Die α-Werte sind dabei der Aufstellung (20') bei $r = 4$ entnommen. Führt man diese Rechnung bis ε_{10} fort, so ergibt sich

$$\varepsilon_{10} \leqq 1{,}99 \cdot 10^{-6},$$

d. h. die Fehlerschranke wird durch die genauere Berechnung auf zwei (statt drei) Einheiten der letzten Stelle herabgedrückt. Abb. 4 zeigt bis $n = 20$ den Verlauf der genau und der nach der Näherungsmethode berechneten Fehlerschranken. Für $n = 20$ liefert das erstere Verfahren $\varepsilon_{20} \leqq 6{,}1 \cdot 10^{-6}$, das letztere $\varepsilon_{20} \leqq 8{,}6 \cdot 10^{-6}$. Man überlegt sich leicht, daß mit wachsendem n das Verhältnis der in der einen und andern Weise berechneten Fehlerschranken einem festen Wert zustrebt.

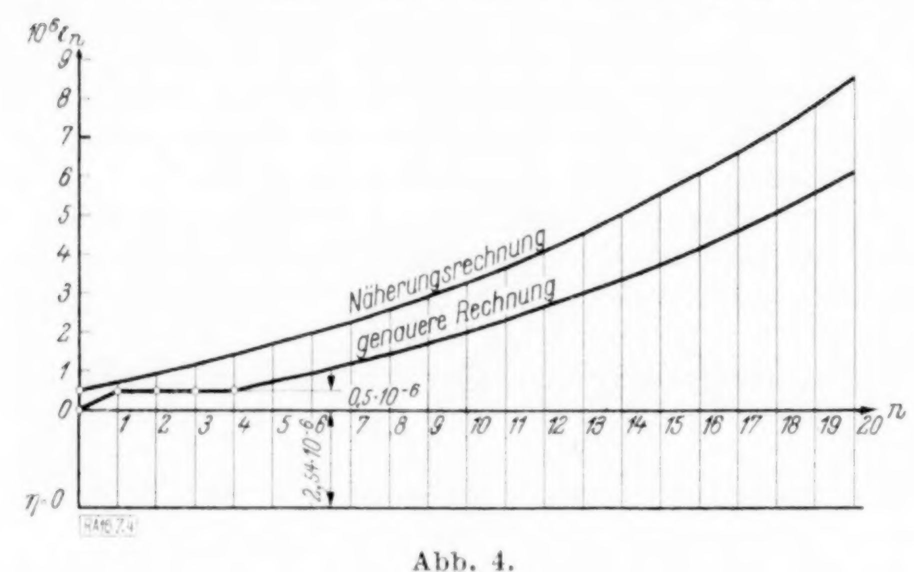


Abb. 4.

Selbstverständlich wird man — wie bei allen derartigen Aufgaben — annehmen dürfen, daß in normal liegenden Fällen die wirkliche Abweichung zwischen dem richtigen Integralwert y und dem nach einem Näherungsverfahren berechneten erheblich unter der theoretisch bestimmbaren Fehlerschranke liegt. Dies hat seinen Grund darin, daß sich im Verlaufe der Rechnung wiederholt positive und negative Teilfehler aufheben, während die Theorie der Fehlerbestimmung den ungünstigsten Fall sich in gleichem Sinn überlagernder Fehler voraussetzt. In unserm Beispiel bestätigt sich diese Vermutung vollauf. Man kann, wie schon erwähnt, das Integral der vorgelegten Differentialgleichung in geschlossener Form angeben. Die Beziehung zwischen y und x lautet

$$\log \operatorname{nat} (x^2 + y^2) = 2 \operatorname{arc\,tg} x/y\,.$$

Es läßt sich daraus — übrigens durch eine Rechnung, die kaum weniger Mühe macht als die Durchführung der numerischen Integration — feststellen, daß der zu $x = 0{,}2$ gehörige y-Wert sich in den ersten 6 Dezimalstellen nicht von dem Ergebnis der Näherungsintegration $y_{10} = 1{,}167842$ unterscheidet. Der wirkliche Fehler ist also hier kleiner als eine halbe Einheit der sechsten Stelle, oder als ein Viertel der theoretischen Fehlerschranke. 16

KLEINE MITTEILUNGEN

Abhängigkeit der Schwingungsdauer einer gedämpften Schwingung von der Größe der Dämpfung. In der Praxis wird vielfach die Schwingungsdauer T_u einer ungedämpften Schwingungsanordnung bestimmt und daraus auf die Schwingungsdauer T_g der gedämpften Anordnung geschlossen. Wenn im Betrieb die tatsächlich gemessene Schwingungsdauer größer ist als die berechnete Schwingungsdauer T_u, wird die Abweichung vielfach auf die Dämpfung zurückgeführt, die ihrer Größe nach in vielen Fällen schwer zu ermitteln ist. Diese Annahme beruht gewöhnlich auf einem Fehlschluß, da die Abweichung nicht auf die Dämpfung, sondern auf andere Ursachen zurückzuführen ist. Ich habe in den »Grundzügen der technischen Schwingungslehre«, Springer 1923, S. 75, eine Gleichung angegeben, die es ermöglicht, das Verhältnis $T_g : T_u$ aus der verhältnismäßigen Abnahme des Ausschlags bei einer gedämpften Schwingung zu berechnen. Es ist dabei vorausgesetzt, daß die Dämpfung verhältnismäßig mit der Geschwindigkeit anwächst, daß also die Differentialgleichung des Schwingungsausschlags ξ in Abhängigkeit von der Zeit t von folgender Form ist:

$$m \cdot \frac{d^2 \xi}{d t^2} + c \cdot \xi + k \cdot \frac{d \xi}{d t} = 0 \quad . \; . \; . \; (1).$$

Es bedeuten darin m die Masse, c die rücktreibende Kraft und k den Dämpfungsfaktor. Wir bezeichnen mit ε das Verhältnis der Ausschlagabnahme auf eine Schwingung zur Größe des Ausschlages, also

$$\varepsilon = \frac{\xi_n - \xi_{n+1}}{\xi_n} = \frac{\Delta \xi}{\xi} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (2).$$

Es ist dann

$$\varepsilon = 1 - e^{-2\pi \sqrt{\frac{T_g^2}{T_u^2} - 1}} \quad \ldots \quad (3).$$

Diese Gleichung ist als Nummer 12 an der angegebenen Stelle zu finden.

Für die praktische Anwendung empfiehlt es sich, die Gl. (3) etwas umzuformen und statt ε den Wert $\eta = \frac{\xi_n}{\xi_{n+1}}$ einzuführen. Es ist also

$$\eta = 1 : (1 - \varepsilon) = e^{2\pi \sqrt{\frac{T_g^2 - T_u^2}{T_u^2}}} \quad \ldots \quad (4).$$

Wir erhalten

$$\ln \eta = 2\pi \sqrt{\frac{T_g^2 - T_u^2}{T_u^2}} \quad \ldots \quad (5),$$

daraus folgt

$$\frac{T_g}{T_u} = \sqrt{1 + \frac{\ln^2 \eta}{4\pi^2}} \quad \ldots \quad (6).$$

Diese Gleichung kann angenähert noch etwas weiter entwickelt werden, wenn $\ln \eta$ nicht größer als 1 oder η kleiner als etwa 3 ist. Es ist dann nach dem binomischen Satz

$$\frac{T_g}{T_u} = \sim 1 + \frac{\ln^2 \eta}{8\pi^2} \quad \ldots \quad (7).$$

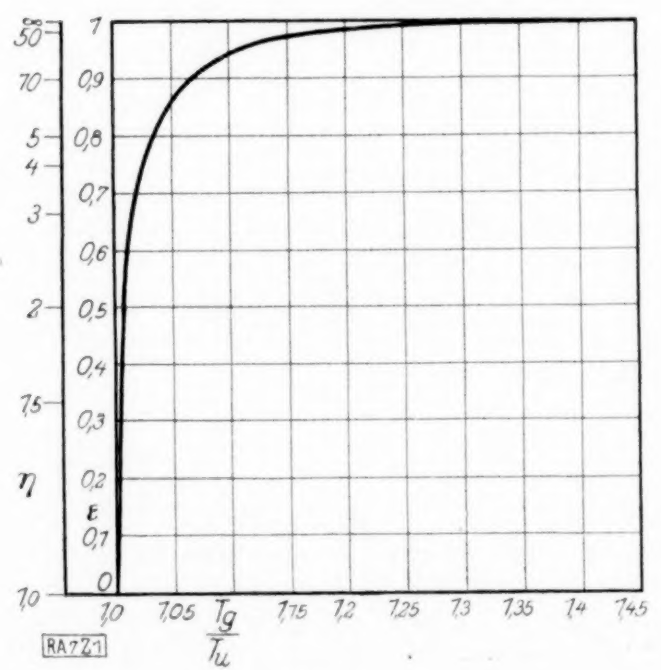


Abb. 1.

In Abb. 1 ist die Beziehung zwischen $T_g : T_u$ und η eingetragen. Man sieht z. B., daß der Unterschied zwischen T_g und T_u nur 6 ‰ beträgt für $\eta = 2$, also für eine Dämpfung, bei der der folgende Ausschlag nur die Hälfte des vorausgehenden beträgt. Selbst bei $\eta = 10$ ist der Unterschied zwischen T_g und T_u noch nicht 7 %. Einem $\eta = 200$, also einer scheinbar aperiodisch verlaufenden Schwingung, entspricht erst eine Erhöhung der Schwingungsdauer T_g um 31 % gegenüber T_u.

Die Abb. 1 zeigt, daß der Unterschied zwischen T_g und T_u in den praktisch vorkommenden Fällen fast stets vernachlässigt werden kann. In der Praxis interessieren ja vor allem diejenigen Schwingungen, bei denen die Dämpfung verhältnismäßig gering ist (höchstens $\eta = 2$). Man kann dann stets mit der in der Praxis gewünschten Genauigkeit T_g durch T_u ersetzen.

Braunschweig
Wöhler-Institut. O. Föppl. 7

Ueber das Drehen eines starren Zylinders in einer plastischen Masse. Dieses Problem hat Herr Hencky in seiner Arbeit über langsame stationäre Strömungen in plastischen Massen [diese Zeitschr. Bd. 5 (1925), S. 115] neben anderen Aufgaben behandelt und dabei das merkwürdige Ergebnis gewonnen, daß der Zylinder das Material nicht mitnimmt, sondern sich einfach darin dreht. Das auf den Zylinder auszuübende Drehmoment ist dabei unabhängig von der Winkelgeschwindigkeit, denn die Schubspannung am Zylindermantel steigt nicht über die Grenzschubspannung des Materials. Läßt man diese Grenzschubspannung mehr und mehr abnehmen (Uebergang zu zäher Flüssigkeit), so kommt man zu verschwindendem Drehmoment unabhängig von der Größe der Winkelgeschwindigkeit, während bei einer zähen Flüssigkeit das Drehmoment der Winkelgeschwindigkeit proportional ist. Diesen auffallenden Unterschied benutzt Herr Hencky geradezu als Kriterium dafür, ob eine zähe Flüssigkeit oder ein plastisches Material vorliegt.

Bei richtiger Durchführung des Henckyschen Ansatzes kann jedoch dieses paradoxe Ergebnis vermieden werden. In der Henckyschen Gleichung 6a) tritt nämlich eine Quadratwurzel auf, was eine Zweideutigkeit des Vorzeichens bedingt, die Herr Hencky nicht berücksichtigt. Nimmt man (vergl. l. c. S. 119, letzte Zeile) für λ den negativen Wurzelwert:

$$\lambda = -\frac{2k}{\sqrt{3}} \gamma^{-1},$$

so ergibt sich an Stelle der Gl. 11 die Beziehung:

$$r \cdot \gamma' + 2\gamma = \frac{4k}{\varkappa\sqrt{3}}$$

und man erhält:

$$\gamma = -\frac{2k}{\varkappa\sqrt{3}} \left\{ \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 - 1 \right\}$$

und damit die Geschwindigkeitsverteilung:

$$v = \frac{k}{\varkappa\sqrt{3}} r \left\{ \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 - 1 + \log\left(\frac{r}{r_0}\right)^2 \right\}.$$

Der negative Wert von λ bedeutet, daß die statische Schubspannung $\tau^s = \lambda\gamma$ und die Reibungsspannung $\tau^r = \varkappa\gamma$ entgegengesetzte Richtung haben. Nun geht für das vorliegende ebene Problem die Henckysche Plastizitätsbedingung in die Bedingung der größten Schubspannung (Guest-Mohr) über, und im plastischen Bereich muß

$$\tau_s = \text{konst.} = \frac{2k}{\sqrt{3}} = \tau_0$$

sein. Aus Gleichgewichtsgründen muß aber die Gesamtschubspannung $\tau = \tau^s + \tau^r$ nach außen

proportional zu $\frac{1}{r^2}$ abnehmen, es ist also die Reibungsspannung τ' tatsächlich der statischen τ' entgegengerichtet.

Der Radius r_0, bis zu dem sich das plastistische Gebiet erstreckt, kann aus der Bedingung des Haftens des Materials am Zylindermantel gefunden werden. Ist a der Halbmesser und ω die Winkelgeschwindigkeit des Zylinders, so gilt die Beziehung:

$$\omega = \frac{\tau_0}{2\varkappa}\left\{\left(\frac{r_0}{a}\right)^2 - 1 + \log\left(\frac{a}{r_0}\right)^2\right\} \quad (1)$$

und die Schubspannung am Zylindermantel ist:

$$\tau = \tau_0 \cdot \left(\frac{r_0}{a}\right)^2 \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

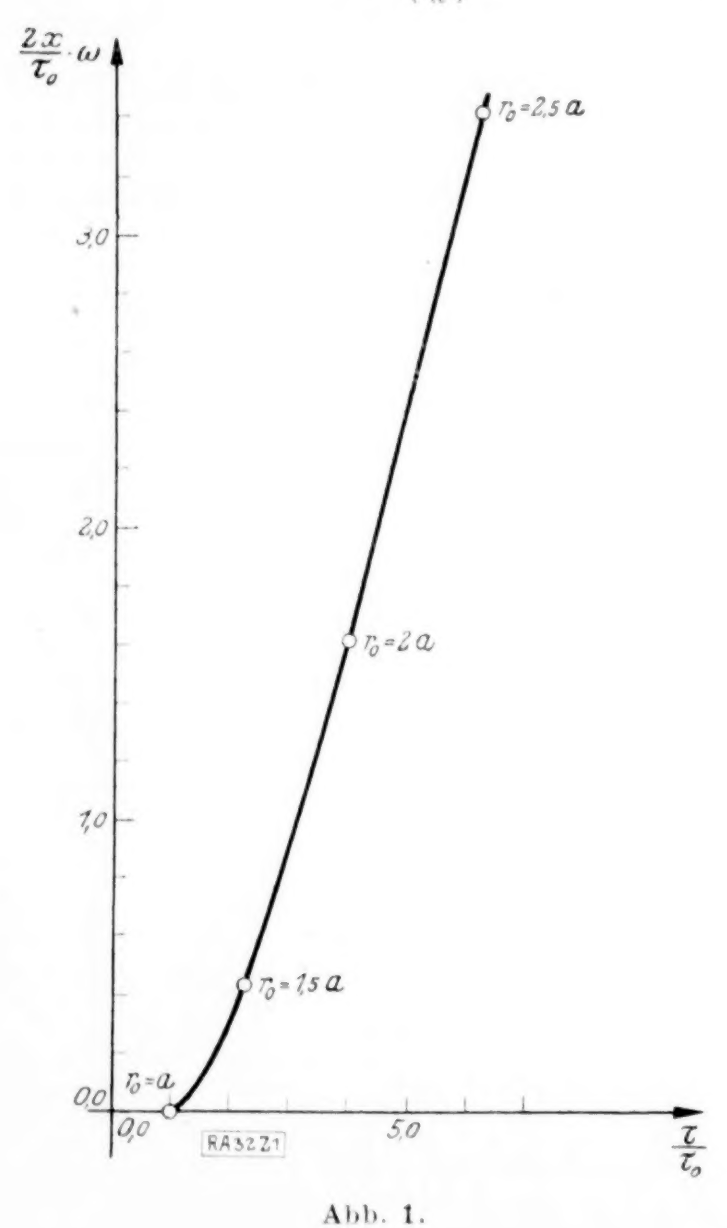


Abb. 1.

Der in diesen Gleichungen enthaltene Zusammenhang zwischen τ und ω ist in Abb. 1 dargestellt, von etwa $r_0 = 2a$ ab ist er nahezu linear. Ist die Schubspannung am Zylindermantel kleiner als die Grenzschubspannung τ_0, so

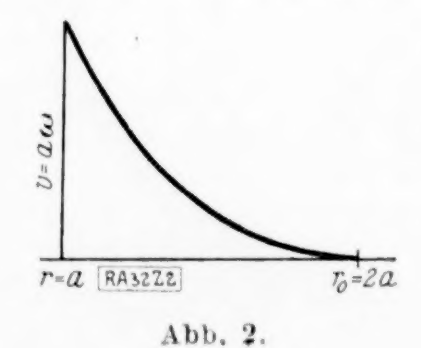


Abb. 2.

tritt kein Fließen des Materials ein. Abb. 2 zeigt die Geschwindigkeitsverteilung für $a = \frac{1}{2} r_0$.

Eliminiert man aus den Gleichungen (1) und (2) den Parameter r_0/a, so ergibt sich die Beziehung:

$$\omega = \frac{\tau}{2\varkappa} + \frac{\tau_0}{2\varkappa}\left\{\log\left(\frac{\tau_0}{\tau}\right) - 1\right\},$$

die für verschiedenes τ_0 (zähe Flüssigkeit) in das bekannte Gesetz:

$$\omega = \tau/2\varkappa$$

übergeht[1]).

Göttingen, Oktober 1929. W. Prager. 32

Den Ausführungen des Herrn Prager schließe ich mich an und danke ihm für die Berichtigung.

Delft. H. Hencky. 32

Angenäherte graphische Bestimmung des Potentials der Doppelschicht. Eine häufig vorkommende Aufgabe bei der praktischen Durchführung ebener Probleme der Potentialtheorie ist die Ausrechnung des Linienintegrals

$$W(p) = \frac{1}{2\Pi}\int\limits_0 \nu(s)\, d\,\vartheta(p\,s)$$

wobei

$$\vartheta = \operatorname{arctg}\frac{y_p - y_s}{x_p - x_s}$$

ist, wenn (x_p, y_p) und (x_s, y_s) die Koordinaten der Punkte p und s sind. Soll der Wert des

[1]) Zusatz bei der Korrektur: Nach Abschluß der obigen Zeilen lernte der Verfasser eine Arbeit von M. Reiner kennen: The theory of plastic flow in the rotation viscosimeter, Journal of Rheology, 1 (1929), S. 5, in der ein verwandtes Problem behandelt wird.

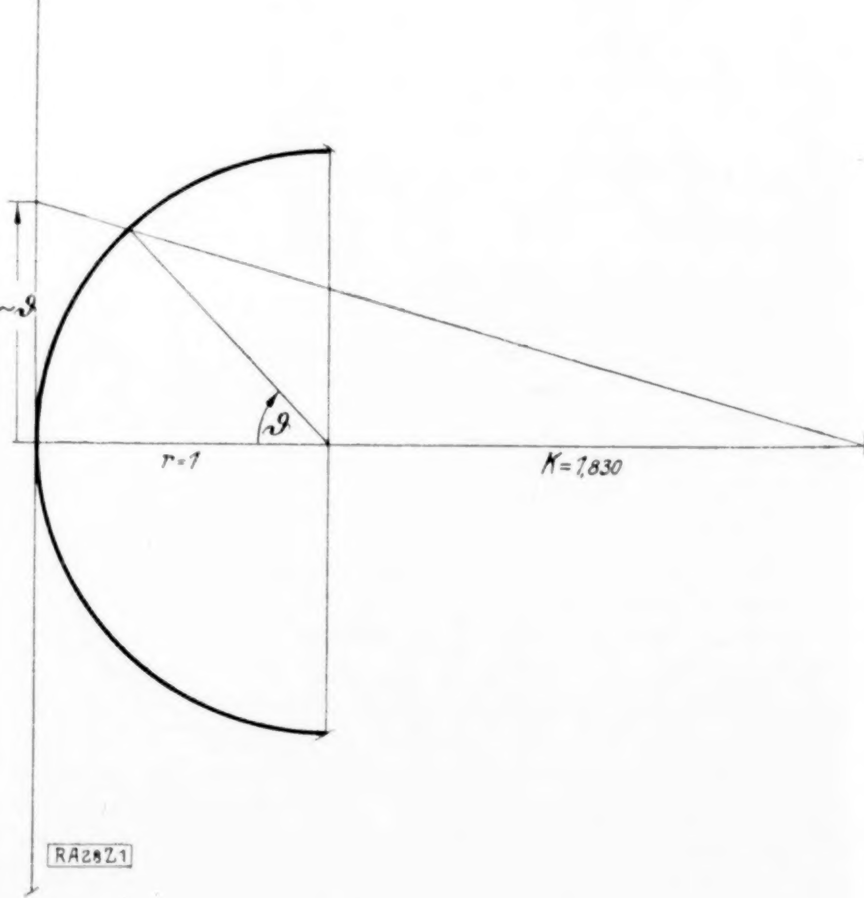


Abb. 1.

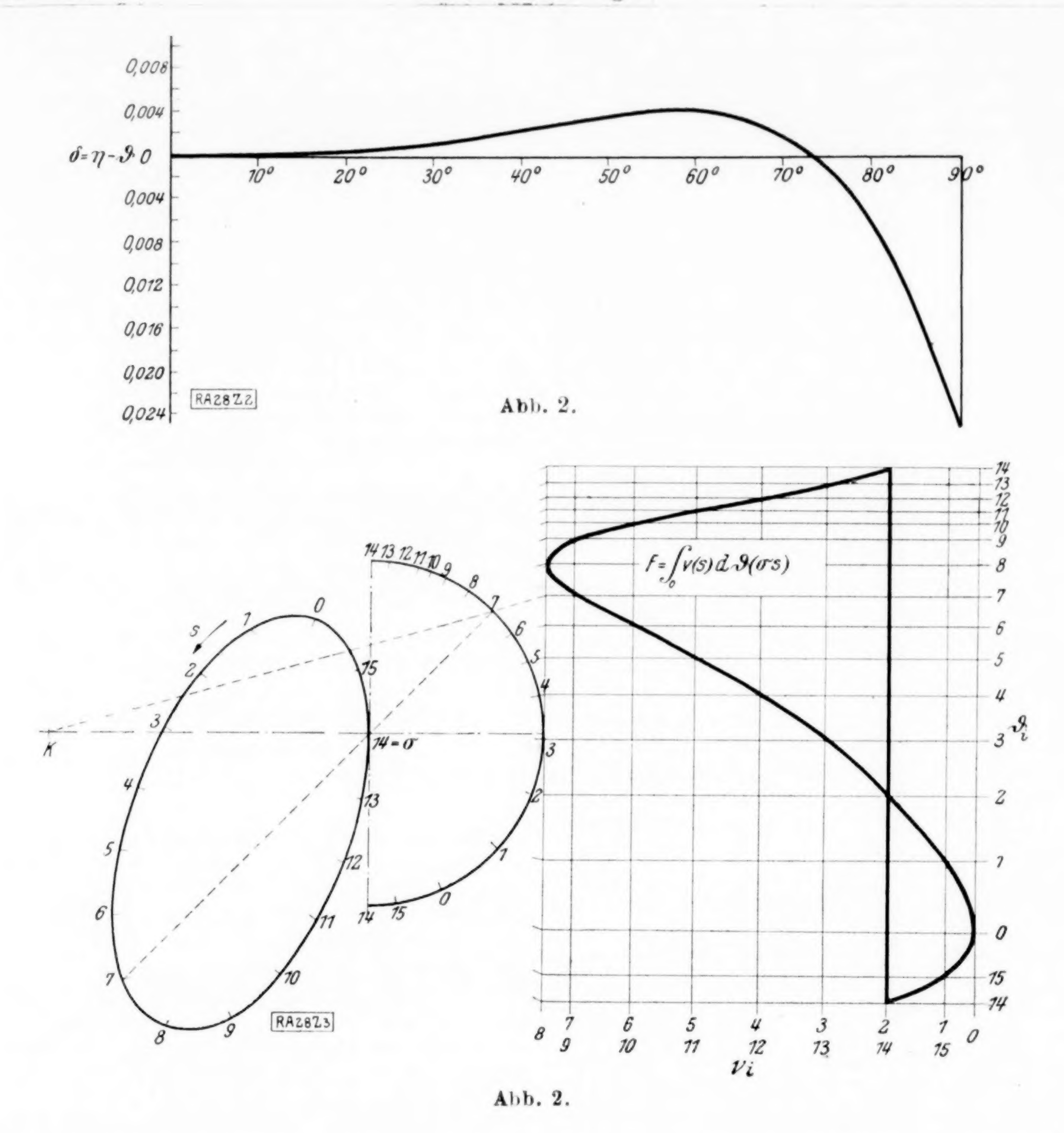


Abb. 2.

Abb. 2.

Integrals graphisch bestimmt werden, so ist eine Rektifikation des Winkels, unter dem einzelne Punkte s von p aus gesehen erscheinen, erwünscht. Für technische Anwendungen ist die verlangte Genauigkeit meist nicht sehr groß und man kann statt der exakt unmöglichen und mit größerer Genauigkeit nur umständlich durchführbaren Rektifikation mit gutem Erfolg für Winkel zwischen $-\frac{\Pi}{2}$ und $+\frac{\Pi}{2}$ die in Abb. 1 dargestellte Näherungslösung wählen.

Der absolute Fehler ist hierbei nicht sehr erheblich, wie Abb. 2 zeigt. Die Anwendung dieser angenäherten Rektifikation ist aus Abb. 3 ersichtlich, wo als Beispiel das Integral $F = \int\limits_0 \nu(s)\, d\,\vartheta(\sigma\, s)$ für einen Punkt $p \longrightarrow \sigma$ auf der (äußeren) Berandung von s durchgeführt ist.

Den Wert $k = 1{,}830$ (Abb. 1) erhält man durch folgende Ueberlegung: Von einem Punkte k werden die Endpunkte von Kreisbogen auf eine Tangente in $\vartheta_0 = 0$ projiziert. Der Punkt k ist so zu legen, daß die Abweichung $\delta = \eta - \vartheta$ für ein Intervall $0 < \vartheta < \vartheta_1$ im Mittel verschwindet, so daß durch diese Projektion die Rektifikation der Kreisbogen in diesem Intervall als angenähert betrachtet werden kann.

Es ist

$$\eta = \sin\vartheta \,\frac{k+1}{k+\cos\vartheta}, \qquad \delta = \eta - \vartheta$$

Es soll sein

$$\int\limits_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} (\eta - \vartheta)\, d\,\vartheta = 0$$

$$(k+1)\int\limits_0^1 \frac{\sin\vartheta\, d\,\vartheta}{k+\cos\vartheta} - \int\limits_0^{\vartheta_1} \vartheta\, d\,\vartheta = 0$$

$$(k+1)\cdot \ln\frac{k+1}{k+\cos\vartheta_1} - \frac{\vartheta_1^{\,2}}{2} = 0$$

Hieraus kann $k = k(\vartheta_1)$ bestimmt werden. Für $\vartheta_1 = \frac{\Pi}{2}$ ergibt sich dann der obige Wert für $k = 1{,}830$.

Berlin. F. Weinig. 28

Eine Wahrscheinlichkeitsaufgabe in der Kundenwerbung. Das Werbeverfahren, um das es sich hier handelt, ist wohl bekannt aus Ankündigungen folgender Art: »Jede Packung unserer Ware enthält zwei verschiedene Blumenbilder; die volle Kollektion umfaßt 72 verschiedene Blumenbilder; wer eine volle Kollektion sammelt und einsendet, erhält kostenlos eine Prämie.« Der Verkäufer, der solche Reklame macht, muß sich vernünftigerweise die Frage vorlegen: Wie groß ist die Durchschnittszahl der verkauften Packungen pro Prämie? Die Antwort hängt von der Weiterverfolgung einer klassischen Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung ab, wenn man folgende Voraussetzungen macht:

1. Die Blumenbilder werden auf die Pakete »zufallsartig« verteilt, d. h. jede der möglichen $\binom{72}{2}$ Paare von Bildern hat die gleiche Wahrscheinlichkeit.
2. Jeder Käufer kauft die Packungen und sammelt die Bilder solange, bis er eine Prämie erhält, und zwar sammelt er ausschließlich aus Paketen, die er selbst kauft.

In Wirklichkeit werden diese Voraussetzungen natürlich durchbrochen: Die Käufer tauschen ihre Bilder aus oder sie werfen sie fort, der Verkäufer kann ein Bild vorenthalten usw. Wie man sieht, kann die Nichterfüllung der Voraussetzungen sowohl die eine, wie die andere Partei begünstigen und eben deshalb scheint mir die Berechnung der Durchschnittszahl unter den besagten Voraussetzungen mindestens als erste Orientierung einen gewissen Wert zu haben. Ich will die Berechnung in folgendem allgemeinen Fall durchführen: Die volle Kollektion enthält n verschiedene Bilder (anstatt 72) und der Käufer erhält in jedem Paket m verschiedene (anstatt 2). Gesucht ist $H = H_{n,m}$ die durchschnittliche Anzahl der Pakete zu m Bildern, die der Käufer kaufen muß, um alle n verschiedene Bilder zu erhalten.

Wohlbekannt[1]) ist die Wahrscheinlichkeit W_k dafür, daß der Käufer in k Paketen sämtliche n Bilder vorfindet:

$$W_k = 1 - \binom{n}{1} v_1^k + \binom{n}{2} v_2^k - \ldots + (-1)^n v_n^k \quad \ldots (1),$$

wobei

$$v_i = \frac{(n-i)(n-i-1)\ldots(n-i-m+1)}{n \quad (n-1) \quad \ldots \quad (n-m+1)}.$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Käufer, der seine Pakete sukzessive kauft, seine Kollektion von n Bildern mit dem $k$ten Paket abschließt, ist offenbar $W_k - W_{k-1}$. Daher ist die gesuchte Durchschnittszahl

$$H = 1 W_1 + 2(W_2 - W_1) + 3(W_3 - W_2) + \ldots \quad (2).$$

[1]) Vergl. z. B. A. A. Markoff, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Leipzig und Berlin 1912, S. 101 bis 108, insbesondere die Frage 5 auf S. 102 und deren Beantwortung S. 105. Die Buchstaben n, m, k haben hier dieselbe Bedeutung wie bei Markoff.

Um diesen Ausdruck zu vereinfachen, definiere ich W_0 mittels Formel (1), worin $v_i^0 = 1$ gesetzt sei, selbst dann, wenn $v_i = 0$ ist. Dann ist $W_0 = 0$ und aus (2) folgt

$$H = \sum_{k=1}^{\infty} k(W_k - W_{k-1}) = \sum_{k=1}^{\infty} k[(W_k - 1) - (W_{k-1} - 1)]$$
$$= -(W_0 - 1) - (W_1 - 1) - (W_2 - 1) - \ldots \quad (3).$$
$$= \binom{n}{1}\frac{1}{1-v_1} - \binom{n}{2}\frac{1}{1-v_2} + \ldots - (-1)^n \frac{1}{1-v_n}$$

Im Uebergang zur zweiten Zeile wurde

$$\lim_{k\to\infty} k(W_k - 1) = 0$$

und im Uebergang zur dritten die Summenformel der geometrischen Reihe berücksichtigt. Ich setze ferner

$$\frac{1}{1-v_x} = \frac{1}{1-\left(1-\frac{x}{n}\right)\left(1-\frac{x}{n-1}\right)\ldots\left(1-\frac{x}{n-m+1}\right)}$$
$$= \frac{1}{ax - bx^2 + \ldots} = \frac{1}{ax} + f(x) \quad \ldots\ldots (4),$$

wobei a, b verschiedene symmetrische Funktionen derselben m Größen sind,

$$a = \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \ldots + \frac{1}{n-m+1} \quad (5),$$

$$b = \frac{1}{n(n-1)} + \frac{1}{n(n-2)} + \ldots + \frac{1}{(n-m+2)(n-m+1)} \quad \ldots\ldots (6).$$

Mit diesen Bezeichnungen findet man

$$f(0) = \frac{b}{a^2} \quad \ldots\ldots\ldots (7),$$

$$H = \frac{1}{a}\left[\binom{n}{1} - \binom{n}{2}\frac{1}{2} + \binom{n}{3}\frac{1}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n}\frac{1}{n}\right] + f(0) + \left[-f(0) + \binom{n}{1}f(1) - \ldots + (-1)^{n-1}f(n)\right] \quad \ldots (8).$$

Berücksichtigt man, daß die erste eckige Klammer rechts in (8)

$$= \int_0^1 \frac{1-(1-x)^n}{x}\,dx = \int_0^1 \frac{1-t^n}{1-t}\,dt = \int_0^1 (1 + t + \ldots + t^{n-1})\,dt$$

ist, so erhält man mit der üblichen Bezeichnung der Differenzenrechnung

$$H_{n,m} = \frac{1}{a}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right) + f(0) - (-1)^n \Delta^n f(0) \quad \ldots (9).$$

Ich hebe die beiden Spezialfälle $m = 1, 2$ hervor:

$$H_{n,1} = n\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right) \quad (10),$$

$$H_{n,2} = \frac{n(n-1)}{2n-1}\left[\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2n-1}\left(1 - \frac{(-1)^n}{\binom{2n-2}{n}}\right)\right] \quad (11).$$

Man kann sich überzeugen, indem man

$$\frac{1}{x\,a} + f(x) \quad \text{durch} \quad \frac{1}{1-\left(1-\frac{x}{n}\right)^m}$$

approximativ ersetzt, daß $\Delta^n f(0)$ bei festem m und unendlich wachsendem n gegen 0 strebt. Indem man noch die bekannte Formel

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}=\log n+\gamma+\frac{1}{2n}+\ldots \quad (12)$$

heranzieht, wobei $\gamma = 0{,}5772\ldots$ die Eulersche Konstante ist, erhält man leicht aus (9), (7), (6), (5)

$$H_{n,m}=\left(\frac{n+{}^1\!/_2}{m}-\frac{1}{2}\right)(\log n+\gamma)+{}^1\!/_2+\varepsilon_n \quad (13)$$

mit $\varepsilon_n \longrightarrow 0$ für $n \longrightarrow \infty$ bei festem m.

Für das eingangs erwähnte Beispiel findet man aus (11) und (12) oder auf Grund von (13), worin ε_n Null gesetzt wird,

$$H_{72,2} = 174{,}0.$$

Der Kunde wird also durchschnittlich 174 Packungen mit je 2 Bildern kaufen müssen, um einmal die Prämie zu erwerben.

Auf Grund von (13) findet sich ferner[1])

$$H_{90,5} = 89{,}9.$$

Zürich. G. Pólya. 18

Bemerkungen zu einem Satze von Herrn Zermelo. In einer kürzlich erschienenen Arbeit[2]) beweist Herr Zermelo einen ziemlich allgemeinen Satz über die Auflösung eines Systems von n homogenen nicht als linear vorausgesetzten Gleichungen durch ein konvergentes Iterationsverfahren. Zu diesem Satz werden im folgenden zwei Bemerkungen gemacht und es wird auf eine bemerkenswerte Analogie zwischen einer dort gestellten Bedingung und einer in der Statik auftretenden Eigenschaft hingewiesen.

1. Das Eigenwertproblem linearer Gleichungen. Der Satz von Zermelo lautet mit unwesentlichen Kürzungen:

»Besitzt ein System von n Gleichungen in n Variablen

$$u_r = f_r(u_1, u_2, \ldots u_n) \equiv f_r(u), \quad (r = 1, 2, \ldots n) \quad (1)$$

eine positive Lösung $u_r > 0$, dann erhält man diese Lösung durch ein konvergentes Iterationsverfahren

$$\left.\begin{array}{c} x_r^{(\nu+1)} = f_r(x^{(\nu)}) \\ (r = 1, 2, \ldots n), \quad (\nu = 1, 2, \ldots) \end{array}\right\} \quad (2)$$

ausgehend von einem positiven, aber sonst willkürlichen System $x_r^{(1)}$, $(r = 1, 2, \ldots n)$, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. Die $f_r(u)$ seien reelle und stetig differenzierbare Funktionen und homogen von der Dimension Eins (d. h. $f_r(\lambda u) = \lambda f_r(u)$ für positive λ). Ferner liegen ihre Funktionswerte zwischen positiven endlichen Schranken für positive und beschränkte Werte der unabhängigen Variablen. Das letztere gelte auch für die partiellen Ableitungen $f_{rs}(x) = \frac{\partial}{\partial x_s} f_r(x)$, soweit diese nicht identisch verschwinden.

2. Es sei $f_{rr} \neq 0$ für jeden positiven Bereich der Variablen.

3. Es gebe bei jeder Einteilung der Zahlen $1, 2, \ldots n$ in zwei Klassen (r, s) mindestens ein Zahlenpaar r, s, wo r der einen und s der anderen Klasse angehört, für welches $f_{rs} \neq 0$ ist.«

Mit einer Umformung dieser letzten Bedingung wird sich unsere zweite Bemerkung befassen. —

Zunächst aber spezialisieren wir den Satz auf den Fall linear-homogener Gleichungen, d. h.

$$f_r(u_1, u_2, \ldots u_n) = a_{r1}\,u_1 + a_{r2}\,u_2 + \ldots + a_{rn}\,u_n,$$

dann tritt an Stelle von (1) das System

$$u_r = \sum_{i=1}^{n} a_{ri}\,u_i \quad (r = 1, 2, \ldots n) \,.\,.\, (3')$$

oder in Vektorschreibweise, wenn $\mathfrak{u}$ den Vektor mit den Komponenten u_r $(r = 1, 2, \ldots n)$ und $\mathfrak{A}$ die Matrix mit den Elementen $a^{\iota\varkappa}$ bezeichnet $(\iota, \varkappa = 1, 2, \ldots n)$

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{A}\,\mathfrak{u} \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. \,(3)$$

und an Stelle von (2) der Iterationsansatz:

$$\mathfrak{x}^{(\nu+1)} = \mathfrak{A}\,\mathfrak{x}^{(\nu)} \,.\,.\,.\,.\,.\,. \,(4)$$

Wir wollen nun das allgemeinere System

$$\mathfrak{u} = \lambda\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{u} \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\, (5)$$

betrachten, wo λ einen willkürlichen Parameter bezeichnet und zeigen, daß der Satz von Zermelo auch die Lösung von (5) mittels der Iteration (4) zu finden gestattet, wobei sich durch dieselbe Rechnung der zu der Lösung gehörige Eigenwert ergibt.

Bezeichnet $\mathfrak{u}_0$ die als existierend vorausgesetzte positive Eigenlösung von (5), λ_0 den zugehörigen positiven, reellen Eigenwert, so unterscheiden sich die Iterationsvektoren $\mathfrak{z}^{(\nu)}$, die man ausgehend von $\mathfrak{z}^{(1)} = \mathfrak{x}^{(1)}$ mittels der Iteration

$$\mathfrak{z}^{(\nu+1)} = \lambda_0\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{z}^{(\nu)} \equiv \mathfrak{B}\,\mathfrak{z}^{(\nu)} \quad (\text{mit } \lambda_0\,\mathfrak{A} = \mathfrak{B}) \quad (6)$$

bildet, nur durch den Faktor $\lambda_0^{\nu-1}$ von den in (4) eingeführten $\mathfrak{x}^{(\nu)}$.

$$\mathfrak{z}^{(\nu)} = \lambda_0^{\nu-1}\,\mathfrak{x}^{(\nu)} \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. \,(7).$$

Nach dem Satz von Zermelo konvergieren aber die $\mathfrak{z}^{(\nu)}$ der Größe und Richtung nach gegen die zum Eigenwert Eins gehörige positive Eigenlösung von $\mathfrak{u} = \mathfrak{B}\,\mathfrak{u}$, das ist $\mathfrak{u}_0$. Es konvergieren also wegen (7) auch die $\mathfrak{x}^{(\nu)}$ der Richtung nach, und zwar gleichfalls gegen die Richtung von $\mathfrak{u}_0$, während ihre Größe asymptotisch wie eine geometrische Reihe mit dem Quotienten λ_0 zu- bzw. abnimmt, wie man auch aus (7) sieht.

$$\lim_{r\to\infty} \frac{x_r^{(\nu)}}{x_r^{(\nu+1)}} = \lambda_0 \quad (r = 1, 2, \ldots n) \,.\,.\, (8).$$

---

[1]) Vergl. mit Markoff a. a. O. S. 108 und die hiesige asymptotische Formel (13) mit der dortigen für k auf S. 107.

[2]) E. Zermelo, Math. Zs. Bd. 29 (1928), Seite 436 bis 460.

Man findet also den unbekannten Eigenwert λ_0 indem man die Iteration (4) solange fortführt, bis sich zwei aufeinanderfolgende $\mathfrak{x}$-Vektoren ihrer Richtung nach — innerhalb der Genauigkeitsgrenzen — nicht mehr unterscheiden, d. h. bis der Quotient aus entsprechenden Komponenten $x_r^{(\nu)} : x_r^{(\nu+1)}$ für alle $r = 1, 2, \ldots n$ konstant wird. Dieser Quotient ergibt dann λ_0 gemäß (8).

Bei der praktischen Durchführung wird man in bekannter Weise[1], damit die $\mathfrak{x}^{(\nu)}$ sich in der Größenordnung nicht zu sehr unterscheiden, geeignete Konstante $\mu^{(\nu)}$ einführen und an Stelle von (4) die Iteration

$$\mathfrak{x}^{(\nu+1)} = \mu^{(\nu)} \mathfrak{A}\, \mathfrak{x}^{(\nu)} \quad \ldots\ldots (4')$$

durchführen. Dann tritt an Stelle von (8):

$$\lim_{\nu \to \infty} \frac{\mu^{(\nu)} x_r^{(\nu)}}{x_r^{(\nu+1)}} = \lambda_0 \quad (r = 1, 2, \ldots n) \quad (8').$$

Unsere erste Bemerkung geht also dahin:

I. Der Satz von Zermelo gestattet, eine positive Lösung des linearen Eigenwertproblems (5) durch die Iteration (4) bzw. (4′) zu finden, wenn eine solche existiert und wenn für die Koeffizienten a_{rs} die Bedingungen 2. und 3. des in Rede stehenden Satzes erfüllt sind; das Iterationsverfahren liefert gleichzeitig Eigenwert und Eigenlösung. Dies stellt eine Erweiterung des bekannten Resultates für symmetrische $a_{i\varkappa}$ dar[2]. Denn hier sind die Koeffizienten nicht als symmetrisch vorausgesetzt.

2. Umformung der Bedingung 3. von Zermelo. Wir lassen nun die Beschränkung auf lineare Systeme wieder fallen. Die Bedingung 3. des erst angeführten Satzes fordert, daß es zu jeder Einteilung der Zahlen $1, 2, \ldots n$ in zwei Klassen r und s, mindestens ein $f_{rs} \neq 0$ geben soll, wo r der einen, s der anderen Klasse angehört. Es ist von Vorteil sich dies geometrisch zu veranschaulichen. Den n Indizes-Werten $1, 2, \ldots n$ mögen n Punkte entsprechen. Jeder Punkt ist mit jedem andern entweder verbunden oder nicht: Wenn in der Matrix der $\{f_{i\varkappa}\}$ entweder f_{rs} oder f_{sr} $(s \neq r)$ einen von Null verschiedenen Wert haben, so wollen wir sagen, daß eine Verbindung zwischen den Punkten r und s vorhanden ist. Für jedes Teilsystem von $l \leqq n$ Punkten gibt es dann innere Verbindungen, das sind solche, die zwischen zweien dem betrachteten System angehörenden Punkten bestehen, und äußere, die einen Punkt des Systems mit einem, dem System nicht angehörenden Punkt verbinden. Es entspricht etwa der Matrix

$$\begin{Bmatrix} f_{11} & 0 & f_{13} & f_{14} & f_{15} \\ f_{21} & f_{22} & 0 & f_{24} & 0 \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & 0 & 0 \\ f_{41} & 0 & 0 & f_{44} & 0 \\ 0 & 0 & f_{53} & f_{54} & f_{55} \end{Bmatrix}$$

Abb. 1.

die Abb. 1. Die gemäß Bedingung 2. stets als nicht verschwindend vorausgesetzten Diagonalelemente kommen in der Figur gar nicht zum Ausdruck. Hier sind z. B. für das System 1, 3, 4 die Verbindungen f_{13}, f_{14} innere und f_{12}, f_{32}, f_{15}, f_{45} äußere Verbindungen. Die Bedingung 3. von Zermelo fordert, das es zu jedem Teilsystem eine äußere Verbindung gibt; denn die Heraushebung eines Teilsystems teilt ja die sämtlichen n Punkte in zwei Klassen r und s, wobei die eine Klasse aus den Punkten des Teilsystems besteht, die andere Klasse aus den übrigen Punkten. — Wir wollen zeigen, daß sich diese Bedingung in einem wichtigen Spezialfall auf eine einfachere Form bringen läßt, während die neue Form im allgemeinen Fall zwar nicht einfacher ist, aber auf eine bemerkenswerte Analogie führt. — Zunächst behaupte ich, daß Bedingung 3. erfordert, daß zwischen den n Punkten mindestens $n-1$ Verbindungen existieren. Nehmen wir an, es seien höchstens $n-2$ solche vorhanden. Wir gehen aus von irgendeiner vorhandenen Verbindung, etwa zwischen den Punkten i und k; entweder hat das System dieser zwei Punkte mit einer inneren Verbindung keine Verbindung nach außen — dann ist die Behauptung schon erwiesen — oder es hat mindestens eine äußere Verbindung, sagen wir (i, l); (natürlich kann Punkt l auch unter Umständen mit Punkt k verbunden sein; oder es können von i und k aus noch viele andere äußere Verbindungen ausgehen). Das System i, k, l hat dann mindestens zwei innere Verbindungen und entweder keine äußere — dann wären wir fertig — oder mindestens eine usw. Dieser Prozeß bricht aber notwendig ab, bevor alle n Punkte erschöpft sind, so daß mindestens ein isolierter Punkt übrig bleibt; denn jeder neue Punkt bringt mindestens eine neue Verbindung mit sich, also kommen auf k Punkte mindestens $k-1$ innere Verbindungen, also sind höchstens $n-1$ Punkte durch die vorhandenen $n-2$ Verbindungen erfaßbar.

Wir behaupten sodann:

IIa. Falls im ganzen genau $n-1$ Verbindungen zwischen den n Punkten

[1] Vergl. R. v. Mises und H. Pollaczek-Geiringer, diese Zeitschr. Bd. 9 (1929), S. 58 bis 77 und S. 152 bis 164; besonders Abschnitt 5. Dort wird das System (5) für symmetrische $a_{i\varkappa}$ behandelt. Es zeigt sich, daß die Symmetrie der Matrix hinreicht, um alle Eigenwerte und Eigenlösungen durch ein konvergentes Iterationsverfahren angeben zu können. Ueber die praktische Wahl der Beiwerte sowie über die einschlägige Literatur werden dort Angaben gemacht.

[2] Ebenda, S. 154 und 164.

bestehen, so ist die Bedingung 3. von Zermelo äquivalent der folgenden: Es darf kein Teil-System von $l \leqq n$ Punkten geben, das mehr als $(l-1)$ innere Verbindungen besitzt.

Nehmen wir an, es gebe ein solches System von l Punkten mit $l-1+j$ inneren Verbindungen $(j \geqq 1)$; entweder dieses System hat keinen äußeren Stab — dann ist Bedingung 3. verletzt — oder es besitzt mindestens einen äußeren Stab, der zu einem neuen Punkt führt; nehmen wir einen solchen Punkt zu dem System der l Punkte dazu, so kommen dann mindestens $l+j$ Verbindungen auf $l+1$ Punkte und wir schließen nun genau wie früher, daß dieser Prozeß, wenn wir ihn immer weiter fortführen, abbrechen wird, ehe alle n Punkte erschöpft sind; denn wenn wir ρ Punkte dazunehmen, so hat das neue System $l+\rho$ Punkte mit mindestens $(l+\rho-1)+j$ innern Verbindungen, so daß, wegen $j \geqq 1$, $l+\rho$ niemals gleich n werden kann, und also mindestens ein Punkt isoliert bleibt.

Setzen wir umgekehrt voraus, Bedingung 3 sei verletzt, d. h. es gäbe ein System von l Punkten ohne äußere Verbindung. Besäße bereits dieses System mehr als $l-1$ innere Verbindungen, so wären wir fertig. Wir nehmen also an, daß es höchstens $l-1$ innere Verbindungen besitzt, also $l-j$, wo $j \geqq 1$; dann aber besteht das Restsystem aus $n-l$ Punkten, und — da keine äußeren Verbindungen vorhanden sind — aus $(n-1)-(l-j) = (n-l-1)+j$, $(j \geqq 1)$ innern Stäben, womit die Behauptung erwiesen ist.

3. Allgemeiner Fall. Es seien nun mehr als $n-1$ Verbindungen (statt »Verbindungen« gebrauchen wir gelegentlich das Wort »Stäbe«) zwischen n Punkten vorhanden. Wir wollen jetzt der Kürze halber ein System von l Punkten $(2 < l \leqq n)$ mit mehr als $l-1$ inneren Stäben als eine Anhäufung bezeichnen. Man kann sich nun vornehmen, vorhandene Anhäufungen zu »zerstören«. Falls das ganze System kein Teilsystem mit zuviel inneren Stäben enthält, aber selbst $n-1+j$ Stäbe $(j \geqq 1)$, so kann man ganz wahllos j Stäbe entfernen; falls aber Anhäufungen von weniger als n Punkten vorhanden sind, so fasse man eine bestimmte ins Auge mit l Punkten und $l-1+j$ Verbindungen und lasse zunächst alle die ihr angehörenden Punkte weg, die mit den übrigen nur durch einen einzigen Stab zusammenhängen. Dann bleibt ein System von $k \leqq l$ Punkten, das immer noch um j Stäbe zuviel enthält. Diesem System entnimmt man in völlig willkürlicher Weise j Stäbe. — Nun wiederholt man den geschilderten Vorgang solange, bis im ganzen System der n Punkte keine Anhäufung mehr vorhanden ist. Dann sagen wir, es seien alle Anhäufungen zerstört worden. Ich behaupte nun:

IIb) Die Bedingung 3 ist dann und nur dann erfüllt, wenn nach Zerstörung aller Anhäufungen noch $n-1$ Stäbe übrig sind.

Daß diese neue Bedingung hinreichend ist, ist evident. Denn wenn am Schluß noch $n-1$ anhäufungsfreie Verbindungen übrig sind, so ist für dieses System von $n-1$ Stäben gemäß Satz IIa die Bedingung 3 erfüllt und diese ist erst recht erfüllt, wenn man die bei Zerstörung der Anhäufungen weggenommenen Stäbe wieder hinzufügt.

Die Bedingung ist aber auch notwendig. D. h., wenn Bedingung 3 erfüllt ist, so erhält man nach Zerstörung aller Anhäufungen ein (anhäufungsfreies) System von $n-1$ Stäben. Nehmen wir an, dies sei für jedes $k < n$ bereits erwiesen. Gibt es sodann kein einziges Teilsystem mit Anhäufung, sondern sind nur im ganzen System um j Stäbe zuviel vorhanden, so können wir aus dem ursprünglichen System j Stäbe in ganz willkürlicher Weise entfernen, erhalten ein anhäufungsfreies System von $n-1$ Stäben und sind fertig. — Andernfalls fassen wir irgendeine Anhäufung von $l < n$ Punkten mit $l-1+j$ Stäben ins Auge; für dieses Teilsystem ist natürlich Bedingung 3. erfüllt, und man kann also, weil $l < n$ in der geschilderten Art (nach Abbrechen aller einstäbigen Punkte) j Stäbe entfernen, so daß ein anhäufungsfreies System von l Punkten übrig bleibt, für das dann nach Satz IIa Bedingung 3 erfüllt ist. An den Außenstäben, die von diesen l Punkten zu anderen Punkten gehen, wurde dabei gar nichts geändert, so daß also für das ganze System von n Punkten auch nach Entfernung der j Stäbe Bedingung 3 erfüllt ist. In derselben Weise fahren wir fort und es ist in jedem Stadium dieses Prozesses Bedingung 3 erfüllt. Sie ist also auch dann erfüllt, wenn in Verfolgung dieser Vorschrift die Anzahl aller Stäbe genau auf $n-1$ gesunken ist. Dieses System ist aber dann nach Satz IIa gewiß anhäufungsfrei.

In Abb. 1 $(n=5)$ ist die Bedingung 3 erfüllt. Ein anhäufungsfreies System von $n-1=4$ Stäben erhalte ich, wenn ich z. B., um die Anhäufung 1, 2, 3 zu zerstören, (13) streiche, sodann um 1, 2, 3, 5 zu zerstören, (12) streiche und endlich (14), wodurch die Anhäufung (1, 4, 5) verschwindet.

4. Eindimensionales Fachwerk. Im allgemeinen Fall ist die neu eingeführte Bedingung sicher nicht einfacher als Bedingung 3. Aber die geometrische Veranschaulichung führt auf eine bemerkenswerte Analogie auf dem Gebiete der Statik, auf die hier kurz hingewiesen werde[1]).

Denken wir uns die n Punkte auf einer Geraden gelegen, so bilden solche n »Knotenpunkte« mit ihren Verbindungen, den »Stäben«, ein eindimensionales Fachwerk. Die Zahl $n-1$, die für uns eine Rolle gespielt hat, ist für eine Dimension, was die Zahlen $2n-3$ bzw. $3n-6$ in der Ebene bzw. im Raume sind, nämlich die wohlbekannte Bedingung der »statischen Bestimmtheit«. Durch Angabe der Zahl n der Knoten und der durch

[1]) Vergl. zum Folgenden: H. Pollaczek-Geiringer, diese Zeitschr. Bd. 7 (1927), S. 58 bis 72.

Stäbe verbundenen Punktepaare (r, s) ist die Gliederung eines Fachwerks gegeben. Eine Gliederung heißt brauchbar, wenn sich ein starres Fachwerk angeben läßt, daß diese Gliederung besitzt. Für ein eindimensionales bzw. ebenes bzw. räumliches Fachwerk sprechen wir von einer Anhäufung, wenn es ein System von $l > 2$ bzw. $l > 3$ bzw. $l > 4$ Punkten mit mehr als $l-1$ bzw. $2l-3$ bzw. $3l-6$ inneren Stäben gibt.

Es gilt in der Ebene der folgende Satz[1], der einen wichtigen Zusammenhang zwischen dem abzählenden Begriff der Anhäufung und dem statisch-kinematischen der Brauchbarkeit herstellt:

»Ein ebenes, statisch bestimmtes Fachwerk ist dann und nur dann brauchbar, wenn es anhäufungsfrei ist.« Sowie der folgende: »Ein ebenes statisch unbestimmtes Fachwerk ist dann und nur dann brauchbar, wenn nach Zerstörung aller Anhäufungen noch $2n-3$ Stäbe übrig sind.«

Im Raum bestehen die analogen Sätze nicht.

Die Analoga dieser Sätze für eine Dimension gelten genau so, wenn man nur an Stelle von $2n-3$ jetzt $n-1$ setzt. Der Beweis, den wir hier unterdrücken, ist völlig trivial; alle Schwierigkeiten des zweidimensionalen fallen weg. —

Hingegen haben wir hier im zweiten und dritten Abschnitt einen Zusammenhang zwischen zwei Arten von abzählenden Bedingungen bewiesen, der für das Eindimensionale charakteristisch ist. Ist Bedingung 3. nicht erfüllt, so heißt das ja anschaulich, daß das Fachwerk in zwei getrennte Teile zerfällt. Wir haben gezeigt — was keineswegs anschaulich einleuchtend ist —, daß dieses Zerfallen dann und nur dann eintritt, wenn kein anhäufungsloses System von $n-1$ Stäben existiert. Für eine Dimension kann man daher das Brauchbarkeitskriterium auch so aussprechen.

Ein eindimensionales Fachwerk von beliebig vielen Stäben ist dann und nur dann brauchbar, wenn es nicht in zwei verbindungslose Teile zerfällt.

Man erkennt den Sinn des eben ausgesprochenen Satzes noch besser, wenn man ihn auch analytisch ausspricht, d. h. wenn man die Fachwerksmatrix eines eindimensionalen Fachwerks betrachtet. Sei n die Anzahl der Knoten, s die der Stäbe; man beachtet, daß, falls zwischen den Knoten i und j ein Stab (i, j) vorhanden ist

$$(x_i - x_j)(d x_i - d x_j) = 0$$

gilt, und bildet die Matrix dieser s homogenen Gleichungen mit n unbekannten Verschiebungen dx_i. Wenn der, sagen wir, k-te Stab der Stab (i, j) ist, so steht in der k-ten Zeile der Matrix an der i-ten Stelle $x_i - x_j$, an der j-ten Stelle $x_j - x_i$ und an allen anderen Stellen Null. Diese Matrix hat (da noch eine Verschiebung, etwa dx_1 willkürlich gleich Null gesetzt werden kann), höchstens den Rang $n-1$; sie hat genau den Rang $n-1$, wenn sie eine nicht verschwindende Determinante $(n-1)$-ter Ordnung besitzt. Eine nicht identisch verschwindende Determinante existiert nach dem früheren dann und nur dann, wenn ein anhäufungsloses (brauchbares) System von $n-1$ Stäben vorhanden ist. Die Ueberlegungen des vorigen Abn. 3 lehren nun, daß das Fehlen eines anhäufungslosen Systems von $n-1$ Stäben mit der Verletzung von Bedingung 3. zusammenfällt. Diese letzte aber beinhaltet, daß sämtliche Spalten der Matrix in zwei Gruppen zerfallen, derart, daß jede einzelne Zeile entweder in den Spalten der einen oder in den Spalten der andern Gruppe lauter Nullen aufweist. Es gilt somit der Satz (dessen triviale Umkehrung wir unterdrücken): Die Matrix des eindimensionalen Fachwerks kann nur identisch verschwinden, wenn sie in der eben geschilderten Weise in zwei Teile zerfällt. Dieses Zerfallen in zwei Gruppen für die ganze Matrix, stellt für die Unbrauchbarkeit des Systems, d. h. für das identische Verschwinden aller Determinanten $(n-1)$-ter Ordnung ein notwendiges Kriterium dar, das keinerlei direkte Beziehungen mehr zum Begriff des Ranges, zu den einzelnen Determinanten $(n-1)$-ter Ordnung, enthält.

Berlin. H. Pollaczek-Geiringer. 969

BUCHBESPRECHUNGEN

(Die hier angezeigten Bücher sind durch die VDI-Buchhandlung, Berlin NW 7, Ingenieurhaus, zu beziehen.)

Ingenieur-Archiv. Unter redaktioneller Mitwirkung von A. Betz, A. Hertwig, K. v. Sanden herausgegeben von Dr.-Ing. Dr. R. **GRAMMEL,** Professor an der Technischen Hochschule Stuttgart. I. Band. Erstes Heft. Springer, Berlin 1929. 122 S. Preis des Heftes 9,60 M.

Als vor zehn Jahren die »Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik« gegründet wurde, erschien es noch ein Wagnis, diesem Stoffgebiet, das bis dahin nur gelegentliche Berücksichtigung an verschiedenen Stellen gefunden hatte, ein eigenes Publikationsorgan zu widmen. Inzwischen hat sich, nicht zuletzt durch das Bestehen der Zeitschrift, durch die Tätigkeit der aus dem Kreise der Zeitschrift heraus entstandenen »Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik«, schließlich in weiterem Umfang durch die Internationalen Mechanik-Kongresse, deren dritter demnächst in Stockholm stattfindet, das Interesse und die Produktion auf dem Gebiete der Mechanik und der verwandten Zweige der angewandten Mathematik außerordentlich vermehrt. Die Steige-

rung des Umfangs unserer Zeitschrift von Beginn des laufenden Jahrgangs ab kann dem Bedarf wohl auch nicht voll nachkommen. Es ist daher verständlich und entspricht der Entwicklung, wie sie in allen Fachgebieten schließlich vor sich geht, daß jetzt an einer zweiten unabhängigen Stelle, in einem andern Verlage, von einer anderen Schriftleitung eine Zeitschrift ähnlicher Richtung ins Leben gerufen wird.

Das »Ingenieur-Archiv« des Springerschen Verlages, herausgegeben von R. Grammel in Stuttgart, dessen erstes Heft jetzt vorliegt, genügt nach Form und Inhalt allen billigen Anforderungen. Die acht Aufsätze, die das Heft enthält, gehören sämtlich dem Gebiet der technischen Mechanik an, das auch von unserer Zeitschrift vorzugsweise gepflegt wird. Referate, kleinere Mitteilungen und Nachrichten sind in dem Plan der neuen Zeitschrift nicht vorgesehen. Der Leserkreis, an den sich das Archiv wendet, und das wissenschaftliche Niveau der einzelnen Arbeiten sind wohl die gleichen wie bei unserer Zeitschrift. Daß der Herausgeber in einem kurzen Einführungsartikel den Lesern verspricht, für leichte Verständlichkeit der Veröffentlichungen zu sorgen, entspringt einem sehr begreiflichen guten Willen, der sich aber, wie die Schriftleitung mit der Zeit erfahren wird, nur sehr schwer und nur zu sehr geringem Teil realisieren läßt. Auch von unserer Schriftleitung sind die gleichen Gesichtspunkte bei früheren Gelegenheiten (z. B. Bd. 3, 1923, S. 2) zum Ausdruck gebracht worden.

Von den wissenschaftlichen Beiträgen des ersten Heftes sei der von C. Schmieden über die unstetige Strömung um einen Kreiszylinder besonders hervorgehoben. Hier wird gezeigt, wie aus der Helmholtz-Kirchhoffschen Theorie der unstetigen Bewegung idealer Flüssigkeiten nach dem Verfahren von Levi-Civita eine Strömungs-Ablösung an einem eingetauchten Zylinder berechnet werden kann; ein Resultat, das bisher stets aus der Prandtlschen Grenzschicht-Theorie, also als eine Wirkung der Flüssigkeitsreibung, abgeleitet wurde.

Wir begrüßen das »Ingenieur-Archiv« als eine sachlich wohl begründete und daher willkommene Ergänzung unserer Zeitschrift. Daß von vornherein keine feste Erscheinungsweise festgelegt ist, sondern die Ausgabe der Hefte dem jeweiligen Bedarf angepaßt werden soll, läßt die Neugründung besonders zweckdienlich erscheinen. Mises. 45

ARNOLD **BERLINER**, Lehrbuch der Physik in elementarer Darstellung. Vierte Auflage. Mit 802 Abb. Verlag Springer, Berlin 1928. Preis geb. 19,80 M.

Das bekannte und mit Recht sehr verbreitete und beliebte elementare Lehrbuch der Physik von A. Berliner liegt seit einiger Zeit in 4. Auflage neu bearbeitet vor. Nahezu die Hälfte des stattlichen Bandes ist der Mechanik gewidmet, weit mehr als es sonst in derartigen physikalischen Einführungen der Fall zu sein pflegt. Die Darstellung der Mechanik geht wohl unverkennbar von den klassischen Vorbildern der Lehrbuch-Literatur der zweiten Hälfte des vorigen Jahrhunderts aus. Doch hat der Verfasser es verstanden, an allen Stellen neueren Auffassungen und Forschungsergebnissen Eingang zu verschaffen. Bekanntlich bietet es ja große Schwierigkeiten, die Mechanik ohne Heranziehung weitgehender mathematischer Hilfsmittel, im wesentlichen phänomenologisch zu behandeln, ohne dabei allzu sehr in trivialen Anfängen stecken zu bleiben. Der Verf. hat auch diese Klippe umgangen und seine überaus klare und bildhafte Ausdrucksweise, sein großes Verständnis für die Aufnahmefähigkeit der Leser gestalten das Berlinersche Handbuch auch in der neuen Fassung zu einem der besten und empfehlenswertesten Hilfsmittel für eine erste gründliche Einführung in die Elemente der Mechanik und Physik. Mises. 45

Dr.-Ing. BRUNO **ECK**, ehem. Konstrukteur der Frankfurter Maschinenbau-Aktiengesellschaft vorm. Pokorny & Wittekind und W. J. **KEARTON** M. Eng. A. M. I. Mech. E. A. M. Inst. N. A. Lecturer in Engineering, The University of Liverpool. Turbo-Gebläse und Turbo-Kompressoren. Herausgegeben von Dr.-Ing Bruno Eck. Mit 226 Textabb. Verlag Springer, Berlin 1929. IX + 294 S. Preis geb. 28 M.

Dieses Buch beabsichtigt, sowohl dem in der Praxis arbeitenden Ingenieur, als dem Studierenden zu dienen und es kann im voraus gesagt werden, daß diese Ziele in vorzüglicher Weise erreicht wurden.

Einer kurzen Einleitung über den erforderlichen Teil der Wärmelehre folgt ein Abschnitt über Strömungslehre, womit die wichtigsten Hilfswissenschaften in entsprechender Kürze behandelt erscheinen. Kleine Unklarheiten, z. B. die verschiedenen Bezeichnungen $\varkappa$ und k, S. 35 und 36, ψ und λ in den Abb. 28 und 29 oder $h_r = \varphi \frac{v_1^2}{2g} = \varphi \frac{c_1^{-2} - c_2^{-3}}{2g}$, sind für den Anfänger vielleicht störend, dementgegen sind wieder andere Teile besonders einfach und klar dargestellt, wie etwa die eigentliche Theorie der Kreiselverdichter, obwohl auch hier einige Unaufmerksamkeiten vorkommen.

Es folgt ein Kapitel über das Messen von Luft- und Gasmengen und dann ein ausführlicher Abschnitt über Festigkeitsfragen, die begreiflicherweise trotz sehr knapper Darstellung einen verhältnismäßig großen Raum beanspruchen und gute praktische Angaben enthalten. Kleine Unrichtigkeiten und Unklarheiten, z. B. Abb. 126 oder Tabelle S. 144 sind leicht zu beseitigen. Der Abschnitt über Kühlung und Wärmeübertragung ist sehr gründlich und schön behandelt, soweit es hier erforderlich ist. Es folgen die Kapitel: Einstufige Gebläse, Ausführungen, Turbokompressoren für kleinste Leistungen, Regelvorrichtungen, Abdichtung der Welle, Kühlung, Versuchsergebnisse, Auswuchten, die alle persönliche Erfahrung und eigene Gedanken der Verfasser zeigen, immer mit dem Bestreben, theoretische Ein-

sicht mit praktischen Bedürfnissen zu vereinigen.

Das Buch muß demnach sehr empfohlen werden, die Ausstattung ist die gewohnte.

Prag. K. Körner. 43

Dr. J. FRENKEL, Professor für theoretische Physik am Polytechnischen Institut in Leningrad. Einführung in die Wellenmechanik. Mit 10 Abb. Verlag Springer, Berlin 1929. V + 317 S. Preis 26 M, geb. 27,60 M.

Die stürmische Entwicklung, die die physikalischen Grundanschauungen in den letzten Jahren durchgemacht haben, scheint sich einer gewissen Stufe zu nähern, die die weitere Einordnung vieler noch unzureichend verstandener Tatsachen in den neuen Gedankenkreis ermöglicht. Dieser Absatz ist äußerlich auch dadurch gekennzeichnet, daß die bisherige Entwicklung nun in einer Anzahl von zusammenfassenden Büchern bearbeitet werden konnte. Neben dem Sommerfeldschen »wellenmechanischen Ergänzungsband«, der von der Seite der Spektraltheorie ausging, und der De Broglieschen Einführung, die in durchsichtiger Weise die eigenen Gedanken mit denen von Schroedinger verknüpft, verdient das vorliegende Buch ganz besondere Beachtung. Es treten in diesem weniger die zahllosen Einzeltatsachen hervor, aus denen die neue Theorie in mühsamer Arbeit entstand, als vielmehr die ganz prinzipiellen Gesichtspunkte, die den Aufbau einer geschlossenen Theorie ermöglichen; ähnlich wie die klassische Mechanik ursprünglich aus einer Anzahl physikalischer Einzelheiten: den statischen Regeln, den Fallgesetzen usw. auf induktivem Wege erkannt wurde, aber später zu einem deduktiven Gebäude wurde, an dessen Richtigkeit man nicht mehr zweifelte, ohne in jedem Falle dem physikalisch-historischen Wege nachzugehen. Deshalb scheint das Buch auch als Einführung besonders für diejenigen geeignet, die, von der Seite der Mechanik kommend, sich mit den neuen Grundlagen vertraut machen wollen.

Es zerfällt in mehrere Kapitel von verschiedenem Charakter. Das erste ist ein Gesamtüberblick über die Theorie, wobei noch vielfach an die historische Entwicklung der prinzipiellen Gedanken angeschlossen wird; in dieser Uebersicht setzt sich der Verfasser auch schon mit den begrifflichen Grundlagen auseinander, die in der Heisenbergschen Ungenauigkeitsdeutung und der heute viel besprochenen Frage: Kausalität oder Wahrscheinlichkeit? gipfeln.

Das zweite Kapitel behandelt ausführlicher die Grundgleichungen der Wellenmechanik. Besonders hervorheben möchte ich hier die Form, wie die Diracschen Grundgleichungen abgeleitet werden als Verallgemeinerung der Maxwellschen Gleichungen der Elektrodynamik; sie führen bekanntlich zwangsläufig zur Einführung des »Kreiselektrons«.

Das dritte Kapitel: Wellenmechanik und Quantentheorie stellt hauptsächlich die Verbindung zwischen der im zweiten Kapitel gewonnenen Grundlage und der älteren Form der Quantentheorie her, durch Berechnung der Intensitätsmatrizen, die Einführung der Dispersions- und Störungstheorie und weiter der wellenmechanischen Form des Pauli-Prinzips.

Endlich ist das vierte Kapitel den einfachsten speziellen Problemen der Wellenmechanik und ihrer mathematischen Durchführung gewidmet, also in erster Linie der Theorie der wasserstoffähnlichen Atome, der Wasserstoffmolekel und verwandter Fragen, die die Ueberlegenheit der Wellenmechanik über die älteren Ansätze ursprünglich ähnlich erwiesen haben, wie die Newtonsche Ableitung der Keplerschen Gesetze den Glauben an die damals neue klassische Mechanik begründete. Die Behandlung erstreckt sich auch auf die Versuche zur Anwendung auf chemische Valenzfragen (homöo- und heteropolare Moleküle), den Compton-Effekt und andere Einzelheiten.

Die Fortführung der Wellenmechanik wird weitere Schritte zum geschlossenen, sozusagen »klassischen« Ausbau der ganzen Theorie beitragen und sicher ihren Bereich über das bisher Erfaßte hinaus noch mehr ausdehnen. In großen Zügen ist aber in dem in dem Frenkelschen Buche gegebenen Umriß das tragfähige Gerüst für die zukünftige Gestaltung schon klar dargestellt, und die »Einführung« wird daher vielen willkommen sein, denen das Studium und die Weiterführung dieser Grundlagen obliegt.

Breslau. F. Noether. 38

Ferner sind bei der Schriftleitung folgende Bücher eingegangen (ausführliche Besprechung bleibt vorbehalten):

Dr. A. FLECHSENHAAR, Oberstudienrat in Frankfurt a. M. Einführung in die Finanzmathematik. Ergänzungsheft. B. G. Teubner, Leipzig und Berlin 1929. VI + 57 S. Preis kart. 2 M.

C. A. BJERKNES. Niels Henrik Abel. Eine Schilderung seines Lebens und seiner Arbeit. Umgearbeitete und gekürzte Ausgabe aus Anlaß von Abels 100 jährigem Todestag von Dr. V. Bjerknes, Professor an der Universität Oslo. Ins Deutsche übertragen von Else Wegener-Köppen. Mit einem Bildnis. Springer, Berlin 1930. V + 136 S. Preis 6,60 M, geb. 7,80 M.

Technik voran! Jahrbuch mit Kalender für die Jugend 1930. Herausgeber: Deutscher Ausschuß für Technisches Schulwesen und Reichsbund Deutscher Technik. Berlin, Deutscher Ausschuß für Technisches Schulwesen. 1930. 239 S. Preis 1 M.

Dr.-Ing. P. WERKMEISTER, ord. Professor an der Technischen Hochschule in Dresden. Praktisches Zahlenrechnen. Mit 60 Figuren. Zweite verbesserte Auflage. Sammlung Göschen Nr. 405. Verlag Walter de Gruyter & Co., Berlin und Leipzig 1929. 136 S. Preis 1,50 M.

Dr.-Ing. J. **WEERTS,** Dynamische und statische Zugversuche an Aluminium-Einzelkristallen. (Mitteilung aus dem Festigkeitslaboratorium der Technischen Hochschule zu Berlin). Mit 30 Abb. und 3 Zahlentafeln. Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, Heft 323. VDI-Verlag, Berlin 1929. 20 S. Preis 4 M.

Dr.-Ing. WILHELM **SIEBRECHT,** Kassel, Beitrag zur Regelung der Kreiselpumpen und Untersuchungen über die theoretische und wirkliche Förderhöhe. Mit 37 Abb. und 5 Zahlentafeln. Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens. Heft 321. VDI-Verlag, Berlin 1929. 25 S. Preis 5 M.

WILHELM **BLASCHKE,** Professor der Mathematik an der Universität Hamburg. Vorlesungen über Differentialgeometrie und geometrische Grundlagen von Einsteins Relativitätstheorie. I. Elementare Differentialgeometrie. Dritte erweiterte Auflage. Bearbeitet und herausgegeben von Gerhard Thomson, Professor der Mathematik an der Universität Rostock. Mit 35 Figuren. Die Grundlehren der Mathematsichen Wissenschaften in Einzeldarstellungen. Band I. Verlag Springer, Berlin 1930. Preis 18 M, geb. 19,60 M.

Dr. FRITZ **KLIEM,** Humanismus und Mathematik. 2 Abb. Samml. Neudeutscher Humanismus. 7. Bändchen. Verlag Trewendt & Granier, Breslau 1929. 60 S. Preis 1,50 M.

AUSBILDUNG UND UNTERRICHT

Hochschultagung Dresden 1928. Der Deutsche Ausschuß für Technisches Schulwesen hat kürzlich einen Bericht über die von ihm gemeinsam mit dem Deutschen Verband Technisch-Wissenschaftlicher Vereine und dem Verein deutscher Ingenieure im Jahre 1928 veranstaltete Hochschul-Tagung herausgegeben. Wir entnehmen dem Referat von A. Nägel über die Lehraufgaben der Technischen Hochschule die folgenden Ausführungen, die für die von uns vertretenen Fachgebiete von Bedeutung sind.

Herr Nägel geht von der Bemerkung aus, daß es unrichtig sei, von einer Schule, welcher Art immer, zu verlangen, sie müßte alles das lehren, was im Zusammenhange mit der Zielsetzung der Schule das Leben einst als Frucht der in der Schule genossenen Erziehung vom Schüler fordert. Die Aufgabe der Schule sei vielmehr in erster Linie, eine auslösende Wirkung auf die inneren Triebkräfte der Selbsterziehung auszuüben. Für die Technischen Hochschulen ergibt sich daraus die Folgerung, daß sie nicht so sehr den unmittelbaren Bedürfnissen des praktischen Berufes zu dienen, sondern das Hauptaugenmerk auf eine breite naturwissenschaftliche Grundlegung für das technische Studium und auf eine sorgsame Auslese des Lehrhaften innerhalb des weiten Gebiets der technischen Disziplinen zu legen habe. Ueber den Mathematik-Unterricht wird dann gesagt:

»Es muß die Forderung gestellt werden, daß an der Technischen Hochschule der Unterricht für Mathematik und Naturwissenschaften in erster Linie die Anwendung zu betonen hat, sich also stets seiner besonderen Zweckbestimmung als Grundlage und Hilfsdisziplin für das nachfolgende technische Studium bewußt bleiben und sich demnach freihalten muß von zeitraubendem Aufwand an Lehrstoff, der nur durch den Selbstzweck der wissenschaftlichen Behandlung gerechtfertigt werden könnte. Für die fortgeschrittenere Behandlung der Mathematik, Mechanik usw. empfiehlt sich aus diesem Grunde die Festlegung des Unterrichts bis in höhere Semester, in denen der Student durch seinen reiferen Einblick in die Aufgaben der Technik die Beziehungen erfassen kann, die zwischen diesen Aufgaben und den grundlegenden Erkenntnissen und Methoden bestehen, die ihm dieser Unterricht vermittelt. Die Tatsache kann nicht abgestritten werden, daß der bisherige mathematische Unterricht, der die ersten Semester des Studiums in allen Zweigen der Technik beherrscht, mangels jeder Anknüpfung an Problemstellungen der Technik oftmals die Begeisterung abtötet, mit der der Student das von ihm erwählte Berufsstudium aufgriff.«

Die Schwierigkeiten, die sich einer Reform des Mathematik-Studiums entgegenstellen, liegen nach Ansicht Nägels vor allem in der üblichen Auswahl der Dozenten. Hierzu heißt es weiter:

»Das Ziel des Universitätsstudiums der Mathematik liegt abseits von der »Anwendung« und wird daher nur in Ausnahmefällen die wissenschaftliche Entwicklung einer Persönlichkeit hervorrufen, die der Technischen Hochschule die Erfüllung ihrer anders gelagerten Wünsche gewährleistet. Nachdem die vorübergehend betonte Richtung des Studiums der Angewandten Mathematik an deutschen Universitäten im steigenden Tempo verschwindet, erwächst den Technischen Hochschulen immer gebieterischer die Aufgabe, die Erziehung zur Angewandten Mathematik und Mechanik, zur Experimentalphysik und anderen Angewandten Naturwissenschaften selbst zu übernehmen. Dieser Weg ist an vielen Technischen Hochschulen durch die Ausbildung der Lehramtskandidaten mathematischer und naturwissenschaftlicher Richtung für das höhere Schulwesen vorgezeichnet. Bisher scheint jedoch dieser Weg seitens der Technischen Hochschulen noch nicht mit dem Erfolg beschritten worden zu sein, der dem Eigenwesen der Technischen Hochschule entspricht. Hier gilt es, ein Studium der Angewandten Mathematik und der Angewandten Naturwissenschaften zu entwickeln, das sich in methodischem Aufbau und wissenschaftlichem Ziel vom Universitätsstudium bewußt unterscheidet. Nicht die Nachahmung des Universitätsstudiums kann hier die Losung sein, sondern die Begründung eines neuen Studienganges, der dem Wesen und

der Zielsetzung der Technischen Hochschule Rechnung trägt und stark mit geeigneten technischen Fachwissenschaften durchsetzt ist.«

Diesen Ausführungen, namentlich den letzten Sätzen, kann nur in vollem Umfange zugestimmt werden. Die Bemerkung über das Verschwinden der Angewandten Mathematik an den Universitäten ist wohl weniger durch allgemeine Beobachtungen als durch das bedauerliche Vorgehen in Göttingen, wo das Erbe von Felix Klein (in diesem Punkte) rasch vertan wird, begründet. Allein es mag schließlich gleichgültig sein, ob die Pflege der Angewandten Mathematik in dem Sinne, wie sie von der Technik und darüber hinaus von zahlreichen anderen Berufsrichtungen aus gefordert wird, an der Universität oder an der Technischen Hochschule erfolgt. Sicher ist, daß nur energische Maßnahmen in der Ausbildung und Auswahl der künftigen Hochschullehrer die bisher vorhandenen Ansätze vor dem Untergange schützen und vielleicht weiter zu entwickeln vermögen werden. Es sei hier eine Formulierung wiederholt, die von dem Unterzeichneten bei einer früheren Gelegenheit an anderer Stelle gegeben wurde.

»An jeder Universität muß mindestens eine etatsmäßige Lehrstelle, an jeder Technischen Hochschule müssen sämtliche mathematische Lehrstellen angewandten Mathematikern vorbehalten bleiben, d. i. solchen, die nach Anlagen, Vorbildung und bisherigen Arbeiten die Gewähr dafür bieten, daß für sie die Anwendungen der Mathematik in Naturwissenschaft und Technik, und nicht die theoretische Forschung an sich, den Kernpunkt ihres Interesses bilden«[1].

Der Bericht des Deutschen Ausschusses für Technisches Schulwesen, der im Selbstverlag des Ausschusses Berlin 1929 erschienen ist, enthält noch mehrere von verschiedenen Seiten in der Aussprache vorgebrachte Bemerkungen zu diesem Gegenstande, die sich z. T. in ähnlicher Richtung bewegen. Mises. 48

[1]) Naturwissenschaften Bd. 15 (Heft 22), 1927.

NACHRICHTEN

Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik.

Gleichzeitig mit diesem Hefte gelangt der Jahresbericht 1928/29 und der ausführliche Bericht über die Prager Tagung zur Versendung an alle Mitglieder. Es wird um möglichst umgehende Bezahlung des Jahresbeitrags (für Einzelmitglieder 3 M) gebeten.

Ortsgruppe Berlin.

Am 20. Dezember fanden zwei Vorträge der Herren Prof. Dr. A. Korn über »Weiterführung der Riemannschen Methode zur Lösung der Wellengleichung« und Prof. Dr. H. Reißner über »Schwingungen mit Hysteresis« statt.

Am 31. Januar 1930 sprach Hr. Prof. Dr. A. Defant-Berlin über »Strömungen in Meeresstraßen«.

Ortsgruppe Göttingen.

Am 18. Februar werden die folgenden Vorträge stattfinden: 1. S. Gerschgorin »Ein Apparat zur mechanischen Ausführung der Joukowskyschen Abbildung«. 2. A. Betz »Demonstration hydrodynamischer Begriffe«. 3. W. Prager »Vorführung eines Vektorintegrators von Föttinger«.

Russischer Mathematiker-Kongreß. Vom 24. bis 29. Juni 1930 findet in Charkow der »Erste Mathematiker-Kongreß der Union der sozialistischen Räte-Republiken« unter dem Vorsitz von S. Bernstein statt. Von den sechs Sektionen des Kongresses ist die fünfte der Mechanik und mathematischen Physik, die sechste der Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematischen Statistik gewidmet.

Persönliches. Herr Prof. Dr. Th. v. Kármán-Aachen wurde von der Technischen Hochschule Berlin, Herr Direktor Dr. L. Fleischmann-AEG Berlin von der Technischen Hochschule Aachen zum Dr.-Ing. ehrenhalber ernannt.

Hr. Prvdzt. Dr. L. Eckhart in Wien ist zum o. Professor der darstellenden Geometrie (Nachfolge Th. Schmid) an der Technischen Hochschule Wien, Hr. Prvdzt. Dr. J. L. Krames zum o. Professor der darstellenden Geometrie (Nachfolge E. Waelsch) an der Deutschen Technischen Hochschule in Brünn ernannt worden.

Am 6. Januar starb in Bonn im 68. Lebensjahre der emer. o. Professor der Mathematik E. Study. Er gehörte zu den bedeutendsten Geometern der Gegenwart und hat sich um die angewandte Mathematik große Verdienste erworben durch seine »Geometrie der Dynamen«, die die Grundlegung der allgemeinen Methoden für die Statik und Kinematik starrer Körper enthält.

Am 12. Novembar 1929 verstarb der Leiter der Versuchsabteilung beim Reichsbahn-Ausbesserungswerk Göttingen, Herr Reichsbahnrat Hugo Müller. Der Verstorbene, zugleich Praktiker und wissenschaftlicher Forscher, war einer der ausgezeichnetsten Kenner auf dem Gebiete der Gleit- und Rollenlager und hat durch seine Untersuchungen, insbesondere über Lagermetalle, Anfressungen und Schmierung, sich einen hervorragenden Namen in der Fachwelt erworben. 49

(Redaktionsschluß 10. Februar 1930.)

Für die Schriftleitung verantwortlich: Professor Dr. von Mises, Berlin NW 87, Siegmundshof 9; für den Anzeigenteil: Peter Valerius, Berlin NW 40. — VDI-Verlag G. m. b. H., Berlin NW 7. Druck von A. W. Schade, Berlin N 65.